Math. P.
224
q

Math. P.
2247

Hoffmann

4.

Critik der Parallel-Theorie,

von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Professor der Physik zu Aschaffenburg, Mitglied der Departementalgesellschaft der Wissenschaften und Künste zu Mainz.

Erster Theil,

welcher die Darstellung und Prüfung von siebenzehn verschiedenen Systemen enthält.

Bayerische Staatsbibliothek München

Mit zehn Kupfertafeln.

Jena,

im Verlage der Cröker'schen Buchhandlung. 1807.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorerinnerung.

Die für die Elementar-Geometrie so äußerst wichtige Lehre von den Parallellinien beschäftigte den Scharfsinn der vortrefflichsten Geometer seit den ältesten bis zu den neuesten Zeiten. Noch Keinem ist es gelungen, die bekannten Schwierigkeiten, welche sich in dieser intricaten Materie entgegenstellen, auf eine streng geometrische Art zu beseitigen und das System der Parallelen mit mathematischer Evidenz darzustellen.

Die Vortrefflichkeit der Aufgabe reitzte die scharfsinnigsten mathematischen Köpfe, aus mehreren Nationen zur Auflösung; es erschienen Versuche über Versuche zur Berichtigung dieser Lehre; aber es gelang keinem einzigen, diesen Gordischen Knoten zu lösen, und die Wahrheit des eilften Euclidischen Axioms gegen die Angriffe des feinern Scepticismus zu schützen.

Die-

Dieser alte Geometer erklärt in seinen Elementen (I Buch, XXXV Erklär.) die Parallellinien, indem er sagt:

Parallel sind gerade Linien in einer Ebene, die, so weit man sie auch an beyden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zusammentreffen.

und trägt nun kein Bedenken, (Ebendas. Grunds. XI.) den Satz:

Zwey gerade Linien, die von einer dritten geschnitten werden, so daß die beyden innern Winkel zusammen kleiner als zwey rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen,

in der Reihe der Grundsätze aufzustellen.

So sehr nun diesem Satze die Evidenz eines geometrischen Axioms gebricht, so schwer, scheint es mir, ist die Frage zu entscheiden, ob Euclid wirklich den Versuch gemacht, dessen Wahrheit aus streng bewiesenen Sätzen seiner Elemente abzuleiten, und ihn erst da, wo er das

Un-

Unvermögen fühlte, einen bindenden Beweis hierüber zu entdecken, als eine schon für sich selbst einleuchtende Wahrheit aufgestellt habe; oder ob er selbst der Meinung gewesen sey, diese Behauptung könne, als der umgekehrte bewiesene Satz (Elem. I. Buch, 17 Satz) mit Recht den Grundsätzen beygezählt werden. In jedem dieser beyden Fälle ist Euclids Verfahren wo nicht zu rechtfertigen, doch sehr zu entschuldigen; besonders, wenn man die vielen mislungenen Versuche seiner Nachfolger in dieser Materie überdenkt.

Die Menge dieser verschiedenen Darstellungen eines so interessanten Gegenstandes wurde hauptsächlich in neuern Zeiten durch mancherley scharfsinnige Systeme deutscher und auswärtiger Mathematiker vermehrt, und erregte schon vor mehreren Jahren den Wunsch einzelner Sachkundigen, die merkwürdigsten Versuche über diese Materie, nebst ihrer strengen Critik, in Einem Werke vereinigt zu sehen. Die mathematische Literatur besitzt zwar an der bekannten schätzbaren Abhandlung des Herrn Professor Klügel*) eine

---

*) Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio. Göttingae 1763. (XXX pag.) 4to.

ne vortreffliche Schrift über die Parallel-Theorie; allein eines Theils lag es außer dem Plane einer academischen Inaugural-Dissertation, die einzelnen Systeme mit der, zu ihrer vollkommnen Uebersicht nöthigen Ausführlichkeit darzustellen; andern Theils erschienen auch seit jener Zeit (1763) viele muthige Kämpfer auf diesem gelehrten Tummelplatze und versuchten es, durch neue Wege und ganz eigenthümliche Ansichten der Sache, das schwere Ziel zu erringen. Unter mehreren andern darf ich hier nur die bekannten Namen eines Hindenburg, Schulze, Hauff, Legendre, Bossut, Lacroix, Karsten, Lazarus, Bendavid, Voigt, Schmidt, (des unlängst zu frühe verstorbenen) Kircher u. a. m. nennen, welche ihre Theorien theils in Lehrbüchern, theils auch in eigenen Abhandlungen vortrugen.

Die critische Darstellung dieser verschiedenen Systeme gewährt manche wichtige Vortheile.

Fürs Erste findet man hierin alle interessante Theorien der Parallelen beysammen, welche in vielen einzelnen mathematischen Schriften

zer-

zerstreut liegen, und erspart sich so das mühsame Aufsuchen derselben.

Fürs Zweyte übersieht man die höchst verschiedenen Wege, welche bereits in dieser Materie eingeschlagen wurden, und die einem jeden Versuche beygefügte Critik zeigt das Unvollständige oder Mangelhafte desselben, indem man die (mehr oder weniger versteckten) Trugschlüsse erblickt, wodurch sich die Verfasser selbst verleiten ließen, ihre Theorien für evidente Darstellungen zu halten.

Fürs dritte ist diese Sammlung für Jeden, der es sich vornimmt, in dieser schwierigen Lehre seine Kräfte zu versuchen, die nützlichste Vorbereitung zur Rüstung und zum Leitfaden seines Studiums, weil er sogleich sieht, was Andere vor ihm geleistet haben, und was für ihn noch zu leisten übrig bleibt. Er findet hier einen großen Vorrath von Materialien, womit er nach Belieben schalten und walten kann, und erspart sich so manche Stunde Nachsinnen, um am Ende vielleicht doch nur auf einen Weg zu gelangen, welchen ein Anderer schon lange vor ihm betrat. Wer also den Vorsatz faßt, sich um die Berichtigung der

Pa-

Parallell-Theorie neue Verdienste zu erwerben, der mache sich zuerst mit den mancherley Vorstellungsarten seiner Vorgänger bekannt, und suche hier das Unvollständige zu ergänzen.

Fürs Vierte gewährt eine solche Prüfung der vorzüglichsten Systeme der Parallellinien auch solchen einen großen Nutzen, welche nur Liebhaber oder Anfänger des geometrischen Studiums sind. Sie lernen hieraus die verschiedenen Gesichtspuncte und Ansichten kennen, aus welchen man einen und denselbigen Gegenstand betrachten kann, die Mannigfaltigkeit der Darstellungen entwickelt ihre eigene Erfindungsgabe, und das Studium der Parallel-Theorie wird hierdurch zum zweckmäßigsten Mittel, sie mit dem Geiste der geometrischen Methode innigst vertraut zu machen.

Endlich verdienen auch die Bemühungen so vieler Mathematiker, die Lehre von den Parallellinien mit völliger Schärfe darzustellen, in der Geschichte dieser Wissenschaft genannt zu werden, indem es jedem denkenden Geometer äußerst interessant seyn muß, die außerordentliche Mannigfaltigkeit der Hülfsquellen zu erblicken, welche der mensch-

menschliche Forschgeist zur Ergründung der Wahrheit des eilften Euclidischen Axioms sich zu öffnen suchte. Insofern wird also die critische Darstellung dieser Lehre als ein nicht unwichtiger Beytrag zur Geschichte der Elementar-Geometrie anzusehen seyn.

Dies sind die Gründe, welche mich bestimmten, alles, was in der Theorie der Parallelen Merkwürdiges geleistet wurde, zu sammeln, und die einzeln Systeme der verschiedenen Verfasser, soviel es seyn konnte, in der Kürze darzustellen, und ihren Werth mit geometrischer Freymüthigkeit, und in der reinen Absicht, die Wahrheit zu erforschen, critisch zu beleuchten. Da ich bey jedem wahrheitsliebenden Mathematiker ähnliche Gesinnungen vorauszusetzen berechtigt bin, so glaube ich auch hierdurch keinem jener vortrefflichen Männer, deren Versuche ich im folgenden Werke critisire, auf irgend eine Weise zu nahe zu treten; überzeugt, daß auch sie nur vom Geiste der Wahrheit beseelt sind.

Sollte man meinen Vortrag bisweilen zu weitläufig finden, so bedenke man, daß diese Schrift auch solchen gewidmet ist, welche sich nicht

zur

zur Classe der Geometer vom ersten Range bekennen, und daß sie auch dem wißbegierigen Anfänger dienlich seyn soll, um sich mit den Schwierigkeiten der Parallel-Theorie bekannt zu machen.

Mit diesen Vorbemerkungen übergebe ich hier den ersten Theil meiner **Critik der Parallel-Theorie** dem mathematischen Publicum, und verspreche, daß der zweyte und letzte, sobald es die Umstände erlauben, nachfolgen soll.

Aschaffenburg im July 1806.

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Inhalt des ersten Theils der Parallel-Theorie.

Erster Abschnitt. Die Theorie von Clavius. S. 1 bis S. 19.

Zweyter Abschnitt. Die Theorie von Proclus. S. 19 bis S. 27.

Dritter Abschnitt. Die Theorie von Hauff. S. 27 bis S. 42.

Vierter Abschnitt. Die Theorie von Bossut. S. 42 bis S. 56.

Fünfter Abschnitt. Die Theorie von Kästner. S. 56 bis S. 66.

Sechster Abschnitt. Die Theorie von Simson. S. 66 bis S. 81.

Siebenter Abschnitt. Die Theorie von Lacroix. S. 81 bis S. 93.

Achter Abschnitt. Die Theorie von Lorenz. S. 93 bis S. 99.

Neunter Abschnitt. Die Theorie von Segner. S. 99 bis S. 109.

Zehnter Abschnitt. Die Theorie von Nassareddin. S. 109 bis S. 124.

Eilf-

Eilfter Abschnitt. Die Theorie von Kircher. S. 124 bis S. 144.

Zwölfter Abschnitt. Die Theorie von Schmidt. S. 144 bis S. 152.

Dreyzehnter Abschnitt. Die Theorie von Legendre. S. 156 bis S. 182.

Vierzehnter Abschnitt. Die Theorie von Schwab. S. 182 bis S. 207.

Funfzehnter Abschnitt. Die Theorie von Tacquet. S. 207 bis 218.

Sechszehnter Abschnitt. Die Theorie von Hindenburg. S. 218 bis S. 250.

Siebenzehnter Abschnitt. Die Theorie von Hoffmann. S. 250 bis S. 276.

Er.

Erster Abschnitt.

Die Theorie

des

Christoph Clavius*).

Dieser berühmte Commentator über die Euclidischen Elemente gründet seine Theorie der Parallelen auf folgende Sätze.

§. 1.

Eine Linie, welche in allen ihren Puncten von einer geraden, die mit ihr in eben derselben Ebene liegt, einerley Abstand hat, ist selbst eine gerade.

Wenn

*) Euclidis Elementorum libri XV. Accessit lib. XVI. de solidorum regularium cujuslibet intra quodlibet comparatione. Omnes perspicuis demonstrationibus illustrati, nunc quarto editi. Auctore Christophoro Clavio Bambergensi e. S. I. Francof. MDCVII. 8.

Wenn (Tab. I. Fig. 1.) alle Puncte der Linie AB von der geraden DC gleichweit abstehen, d. h. wenn alle Perpendikel, AD, EH, FG, BC auf DC, gleich groß sind, so wird AB eine gerade Linie seyn.

Dieses kann nämlich aus der Erklärung einer geraden Linie klar hergeleitet werden. Denn wenn alle Puncte der Linie AB von der geraden DC gleichweit abstehen, so wird kein Zwischenpunct in ihr zu finden seyn, der von den beyden Endpuncten sich aufwärts oder abwärts entfernt, oder nach einer andern Richtung abweicht. Man wird nichts Gebogenes in ihr antreffen, sondern sie muß sich gleichförmig von einem Puncte zum andern erstrecken, wie die gerade DC. Wenn diese AB nicht gerade wäre, so hätten alle Puncte derselben nicht einerley Abstand von DC, welches gegen die Annahme ist. Auch kann man es sich nicht denken, daß eine Linie, welche mit einer geraden in einerley Ebene liegt, und in allen Puncten gleichen Abstand von ihr hat, nicht auch eine gerade sey. Diese Behauptung ist daher so klar, daß sie unmittelbar eingesehen und von keinem gesunden Menschenverstande geläugnet werden kann. Ohne alle Widerrede ist dieselbe weit evidenter, als der XI Grundsatz des Euclids.

§. 2.

Wenn eine gerade Linie, mit ihrem einen Endpuncte, über eine andere ge-

gerade dergestalt der Quere nach hinbewegt wird, daß sie immer mit derselben einen rechten Winkel bildet, so wird der andere Endpunct auch eine gerade Linie beschreiben.

Es sey, in der vorigen Figur, die gerade AD senkrecht auf DC, und jene bewege sich so über diese, daß sie in dem Puncte D immer einen rechten Winkel bilde, und während der Bewegung nicht hin und her springe, sondern gleichförmig fortgehe, so wird der Endpunct A eine gerade Linie beschreiben. Dieses ist aus demjenigen klar, was zuvor bewiesen wurde. Denn alle Puncte der Linie AB haben von der CD den nämlichen Abstand AD. Folglich muß diese AB selbst eine gerade Linie seyn. (§. 1.).

Auch aus der Erklärung einer geraden Linie folgt dieses schon. Wenn nämlich die zwey Puncte D und A auf eine ähnliche und gleichförmige Art bewegt werden, so werden sie auch ähnliche Linien beschreiben. Da nun der Punct D die gerade Linie DC beschreibt, so muß auch der Punct A eine gerade AB hervorbringen. Denn man kann sich nicht denken, daß die Endpuncte einer geraden Linie, welche sich auf eine gleichförmige Art bewegt, zwey Linien hervorbrächten, die von verschiedener Art wären. Die eine dieser Linien muß daher von eben der Gattung, wie die andere, seyn. Nun ist aber die eine Linie eine gerade. Folglich wird es auch die andere seyn.

Dieser Satz ist so evident, wie der vorhergegangene.

§. 3.

Wenn man auf eine gerade Linie zwey gleiche Perpendikel errichtet, und ihre Endpuncte mit einer geraden Linie verbindet, so werden alle Perpendikel, welche aus irgend einem Puncte dieser obern Linie auf die untere gezogen werden, einer jeden der beyden ersten Perpendikel gleich seyn.

Es seyen (Fig. 2.) aus A und B auf AB die beyden gleichen Perpendikel AC und BD errichtet. Zieht man die gerade CD, und aus einem willkührlichen Puncte derselben, z. B. aus E den Perpendikel EF auf AB, so ist EF = CA = DB.

Wenn EF nicht = CA ist, so muß entweder EF > CA, oder EF < CA seyn. Man setze die FG = AC, so wird in jenem Falle der Punct G unter E, und in diesem über E fallen müssen. Wenn sich nun die AC so über AB bewegt, daß bey A immer der rechte Winkel bleibt, so beschriebe der Punct C eine gerade Linie, welche durch den Punct G gienge (§. 2.) und die beyden geraden Linien CED und CGD schlössen einen Flächenraum ein, welches wiedersprechend ist. Folglich ist EF = CA = DB.

§. 4.

Wenn man auf eine gerade Linie zwey gleiche Perpendikel errichtet, und dieselben in ihren Endpuncten durch eine gerade Linie verbindet, so wird diese an den beyden Endpuncten zwey rechte Winkel bilden.

Auf AB (Fig. 3.) seyen die gleichen Perpendikel AC und BD errichtet, und die Puncte C und D durch die gerade CD verbunden, so wird $\angle C = \angle D = R$ seyn.

Man halbire AB in E, errichte hier einen Perpendikel EF, und ziehe die geraden Linien AF und BF. Da nun AE = BE, FE = FE und $\angle AEF = \angle BEF = R$, so ist $\triangle AEF \cong \triangle BEF$. Folglich auch AF = BF, $\angle FAE = \angle FBE$, und $\angle AFE = \angle BFE$. Nimmt man nun vom $\angle CAE = \angle DBE$ beyderseits den $\angle FAE = \angle FBE$ hinweg, so bleibt $\angle CAF = \angle DBF$. Daher ist auch $\triangle CFA \cong \triangle DFB$, und CF = DF, $\angle C = \angle D$, und $\angle CFA = \angle DFB$. Setzt man beyderseits $\angle AFE = \angle BFE$ zu, so ist $\angle CFE = \angle DFE = R$. Da nun EF = AC = BD (§. 3.), so ist auch, wie kurz zuvor bewiesen wurde, $\angle C = \angle CFE$. Allein $\angle CFE = R$. Folglich ist auch $\angle C$, und daher auch $\angle D = R$.

§. 5.

§. 5.

Wenn zwey gerade Linien von einer dritten geraden so durchschnitten werden, daß die beyden innern Winkel kleiner als zwey rechte sind, so werden diese beyden geraden Linien in ihrer Verlängerung einander auf der Seite schneiden, wo diese Winkel weniger als zwey rechte betragen.

Es werden die geraden Linien AC und BD (Fig. 4. und 5.) von der dritten AB so durchschnitten, daß $\measuredangle ABD + \measuredangle BAC < 2R$, so müssen die Linien AC und BD, wenn man sie nach C und D verlängert, irgend einmal zusammenlaufen.

I. Man nehme an, $\measuredangle ABD = R$, und $\measuredangle BAC < R$. (Fig. 4.). In der AC wähle man einen beliebigen Punct E und ziehe daraus auf AB den Perpendikel EF. Nun nehme man $FG = AF$, $GH = AG$, $HI = AH$ u. s. f., so wachsen die Linien AF, AG, AH, AI und alle folgenden nach den Zahlen 1, 2, 4, 8 u. s. w. und man wird in der verlängerten AB einmal auf einen Punct I kommen müssen, der von A weiter entfernt ist, als B. Wir wollen setzen, dieser Punct I habe die Lage, daß $AI = 8AF$. Nun nehme man auch auf der AC die $EK = AE$, die $KL = AK$, und die $LC = AL$, so daß auch die Linien AE, AK, AL, AC wie die

Zah-

Zahlen 1, 2, 4, 8 zunehmen, und auf der AC so viele Theile sind, wie auf der AI. Man ziehe die FE, GK, HL und IC, verlängere die FE in M, bis EM = FE, die GK in N, bis KN = GK und die HL in O, bis LO = HL, und ziehe endlich die geraden MK, NL und OC. Weil nun KE = AE, ME = FE und $\angle$ KEM = $\angle$ AEF, so ist $\triangle$ KEM $\cong$ $\triangle$ AEF, und MK = AF; allein AF = FG, folglich MK = FG. Auch ist $\angle$ M = $\angle$ F; aber $\angle$ F = R, nach der Verzeichnung, folglich auch $\angle$ M = R. Weil nun auf der FM die beyden gleichen Perpendikel FG = MK errichtet, und dieselben an ihren Endpuncten durch die gerade GK verbunden sind, so ist auch $\angle$ G = R (§. 4.). Auf ähnliche Art wird nun bewiesen, daß $\triangle$ LKN $\cong$ $\triangle$ AKG, und daß folglich NL = AG = GH, und $\angle$ KNL = $\angle$ G = R. Daher ist auch wieder $\angle$ H = R (§. 4.). Desgleichen ist endlich $\triangle$ CLO $\cong$ $\triangle$ ALH, und daher wieder OC = AH = HI, und auch $\angle$ H = $\angle$ I = R. (§. 4.). Nun ist aber auch $\angle$ B = R nach der Annahme; folglich ist die BD parallel mit der IC, und jene muß, in ihrer Verlängerung, die AC zwischen A und C schneiden.

II. Man setze, keiner der beyden Winkel ABD, und BAC (Fig. 5.) sey ein rechter; sondern $\angle$ ABD < R, und $\angle$ BAC entweder < R, oder auch > R.

Hier

Hier ist $\sphericalangle ABD + \sphericalangle BAC < 2R$ und $\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBE = 2R$; folglich ist $\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBE > \sphericalangle ABD + \sphericalangle BAC$, und daher, wenn man beyderseits den $\sphericalangle ABD$ hinwegnimmt, $\sphericalangle DBE > \sphericalangle BAC$. Nun lege man in A an die BA einen $\sphericalangle BAF = \sphericalangle DBE$, so wird dessen Schenkel AF über die gerade AC fallen, weil $\sphericalangle BAF > \sphericalangle BAC$. Da nun $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BAF$, so ist die AF mit der BD gleichlaufend. Man fälle aus A einen Perpendikel AG auf BD, welcher auf die Seite des spitzen Winkels ABD fallen muß, so muß auch $\sphericalangle GAF = R$ seyn. Denn wäre $\sphericalangle GAF < R$, so müßten die Linien AF und GD, weil $\sphericalangle AGD = R$ und $\sphericalangle GAC < R$, auf dieser Seite zusammenlaufen (I.) und könnten, dem Beweise zufolge, nicht parallel seyn. Sollte aber $\sphericalangle GAF > R$ seyn, so wäre $\sphericalangle GAH < R$, und die Linie AF und GD müßten gegen H und B zusammenlaufen, welches doch widersprechend ist, da diese Linien gleichlaufend sind. Folglich ist $\sphericalangle GAF = R$, nud daher dessen Theil, oder $\sphericalangle GAC < R$. Daher werden die Linien AC und GD, weil $\sphericalangle G = R$, und $\sphericalangle GAC < R$, auf der Seite von C nnd D, einander schneiden (I.)

Hätte der Fall Statt, daß die AC zwischen die AG und AB fiele, so ists von selbst klar, daß sie in ihrer Verlängerung die BG, und folglich auch die BD, durschneiden muß. —

Soweit die Theorie des Clavius. Um die Behauptung des §. 4. unabhängig von den

vor-

vorhergehenden Sätzen auf eine andere Art zu rechtfertigen, bedient er sich noch folgender Methode, welche hier angeführt, und in der Folge näher geprüft werden soll.

Wenn zwey gerade Linien so von einer dritten durchschnitten werden, daß der eine der innern Winkel ein spitzer und der andere ein rechter ist, so werden diese beyden geraden Linien auf der Seite des spitzen Winkels immer weniger, und auf der andern Seite immer mehr von einander abstehen.

Es schneide die gerade AB (fig. 6.) die beyden geraden AC und BD so, daß ∢ ABD = R, und ∢ BAC < R, so werden diese Linien gegen C und D immer weniger, und gegen L und M immer weiter von einander entfernt seyn, je mehr sie nach diesen Seiten verlängert werden.

Man ziehe aus B einen Perpendikel BG auf AC, welcher auf die Seite des spitzen Winkels BAC fallen muß. Hier wird nun ∢ GBD < R, und ein Perpendikel GH aus G auf BD muß wieder auf der Seite dieses spitzen Winkels eintreffen, wodurch ∢ HGC < R wird. Fällt man also eine senkrechte Linie aus H auf AC, so wird sie HI seyn, und auf der Seite des spitzen Winkels HGI die AC schneiden. Auf ähnliche Art werden alle folgenden Perpendikel sich immer

von der AB weiter entfernen. Allein es ist auch AB > BG; BG > GH, folglich AB > GH, und die Linie AC hat in A einen größern Abstand von der BD, als in G. Da eben dieses auf gleiche Art von allen folgenden Perpendikeln gilt, so ist bewiesen, daß die Linie AC und BD in den Verlängerungen gegen C und D immer weniger von einander entfernt sind. —

Nun ziehe man aus A auf AC den Perpendikel AL, welcher den stumpfen ∢ BAC in den rechten EAL und den spitzen LAB theilt, und folglich zwischen die AB und die AE fallen muß. Der Winkel ALB muß auch ein spitzer seyn, weil ∢ ABL = R. Folglich ist ∢ ALF > R, und ein Perpendikel aus L auf BF muß zwischen LA und LF fallen. Desgleichen ist nun wieder ∢ LMA < R; folglich ∢ LME > R, und ein Perpendikel aus M auf MC muß zwischen die ME und die ML fallen. Eben dieses gilt von der Lage aller folgenden senkrechten Linien, soviel man derselben auch ziehen mag. Nun ist aber offenbar AL > AB; ML > AL, folglich ML > AB. Ferner MN > ML; ON > MN, daher denn wieder ON > ML. Da dieses nun von allen folgenden Perpendikeln gilt, so hat die gerade AE in M einen größern Abstand von BF als in A, und in O einen grössern als in M, u. s. w. Daher werden sich die Linien AC und BD, gegen E und F hin, immer weiter von einander entfernen.

Wollte man hier behaupten, die gerade AL, welche auf AC senkrecht steht, laufe mit der verlän-

längerten DB nicht zusammen, so wird dasjenige, was eigentlich bewiesen werden soll, noch um so deutlicher erhellen. Denn die Linie DB wird über dem Puncte B noch weit mehr von der CA entfernt seyn, als in dem Puncte B, weil die AL, ins Unendliche verlängert, nicht mit der DB zusammenläuft, da doch die GB, die auch auf AC senkrecht steht, mit der DB in B zusammentrifft.

Nach dieser Voraussetzung ist es leicht zu beweisen, daß oben (fig. 3.) die beyden Winkel C und D rechte sind. Denn wenn ∢ C nicht $=$ R wäre, so hätte man entweder ∢ C $<$ R, oder ∢ C $>$ R. Im ersten Falle müßten die Linien CD und AB, gegen D und B immer weniger von einander entfernt seyn, d. h. es wäre DB $<$ CA, welches der Annahme DB $=$ CA widerspricht. Folglich ist ∢ C nicht $<$ R. Im zweyten Falle müßten die Linien CD und AB gegen D und B sich immer weiter von einander entfernen, und man hätte DB $>$ CA, welches ebenfalls widersprechend ist. Weil nun ∢ C weder $<$ R, noch $>$ R seyn kann, so ist ∢ C $=$ R, und aus eben dem Grunde auch ∢ D $=$ R.

Prüfung dieser Theorie.

Wenn man vorstehende Theorie, welche allerdings mit vielem Scharfsinne ausgedacht ist, gehörig

hörig prüfet, so muß man am Ende doch gestehen, daß ihr jener Grad der geometrischen Evidenz fehlt, welchen eine vollkommene Berichtigung dieser Lehre besitzen muß, und daß folglich der alte Clavius in dieser Materie nicht glücklicher gewesen ist, als die große Menge seiner Nachfolger. Eine beleuchtende Critik wird diese Behauptung rechtfertigen.

Die ganze Theorie von §. 1. bis §. 5. ist evident, und man kann ihr keinen gegründeten Zweifel entgegenstellen, sobald man annimmt, daß der Beweis, dessen sich der Verfasser zur Rechtfertigung der Behauptung des §. 1. bedient, in strenger Form richtig und genugthuend sey. Dieser Satz ist gleichsam der Grundstein des ganzen Gebäudes, und dieser ist unerschütterlich, sobald jener fest steht. Allein eben dieser erste Satz ist es, welchem ein evidenter Beweis mangelt. Alles dasjenige, was darin zur Begründung der Behauptuug angeführt wird, ist nichts anders als eine bloße Erläuterung dieses Satzes, und kein Beweis. Die Erklärung der geraden Linie soll diesen Beweis liefern. Allein, wie kann man dies, da man weder die Natur der geraden Linie hinlänglich kennt, noch eine Erklärung im strengen Sinne des Wortes von ihr anzugeben vermag? — Wenn es im Anfange des Beweises heißt: „Wenn alle Puncte der AB von der „geraden DC gleichweit abstehen, so wird kein „Zwischenpunkt in ihr zu finden seyn, der von „den beyden Endpuncten sich aufwärts oder ab„wärts

„wärts entfernt, oder nach einer andern Rich„tung abweicht" so ist hierdurch offenbar nichts mehr und nichts weniger gesagt, als: wenn die AB überall von der geraden DC gleichen Abstand hat, so ist sie selbst eine gerade Linie, welches doch die Behauptung ist, die bewiesen werden soll. Diese Gründe drehen sich daher in einem beständigen Cirkel herum, und stützen sich auf keine bewiesene Vordersätze.

Mit diesem directen Beweise, der den Namen einer strengen geometrischen Demonstration nicht verdient, sucht Clavius nun noch einen indirecten zu verbinden. Aber auch diese Beweisart ist so wenig bindend, als die vorige. Denn es wird blos gesagt: „Es läßt sich nicht denken, „daß eine Linie, welche mit einer geraden in einer„ley Ebene liegt, und in allen Puncten gleichen „Abstand von ihr hat, nicht auch eine gerade „sey," ohne dabey den Widerspruch zu zeigen, welcher aus dieser Annahme mit vorhergehenden schon bewiesenen Sätzen entstehen müßte, wie dieses doch die Natur des indirecten Beweises erfordert.

Der Hauptsatz dieser Theorie ist also weder auf dem directen, noch auf dem indirecten Wege bewiesen, und es scheint, daß man sich nicht eher einen bündigen geometrischen Beweis davon zu versprechen habe, bis die Natur der geraden Linie bestimmter und genauer entwickelt ist. Denn nur dadurch wird man in den Stand gesetzt, die Begriffe

griffe von dem Geraden und Krummen vollständiger darzustellen, und so gewisse Vordersätze zu bestimmen, welche den Stoff zu einem Beweise für den gegenwärtigen Satz an die Hand geben müssen. Die Folge dieser Schrift wird es zeigen, daß die Bemühungen mehrerer neueren Schriftsteller über die Lehre der Parallelen an eben diesem Beweise gescheitert sind, zum offenbaren Zeichen, daß es hier an Deutlichkeit und Präcision der Grundbegriffe fehle. So sehr auch eine solche Berichtigung unserer Kenntnisse in dieser Rücksicht zu wünschen wäre, so ungewiß ist es freylich, ob wir je diese Stufe der geometrischen Klarheit zu erreichen vermögen.

Clavius selbst scheint es gefühlt zu haben, daß sein Beweis die Ueberzeugung einer strengen geometrischen Demonstration nicht gewähre, indem er sich am Ende desselben bemüht, den zu beweisenden Satz als einen Grundsatz anzunehmen. Es entsteht daher die Frage: Ist die Behauptung des §. 1. so geeigenschaftet, daß man sie als einen Satz, dessen Wahrheit von selbst schon einleuchtend ist, d. h. als ein Axiom annehmen kann? — Ich glaube, daß kein Mathematikverständiger, welcher gewöhnt ist, seine Sätze auf eine überzeugende Art zu beweisen, diese Frage bejahen wird. Für einen Grundsatz ist die Behauptung bey weitem nicht einfach genug, und bedarf allerdings Gründe zu ihrer Rechtfertigung, welche in vorhergehenden Sätzen liegen müßen. Vergeblich hätten sich so viele Mathematiker neuerer

Zei-

Zeiten bemüht, diesen Satz zu beweisen, wenn seine Faßlichkeit sie dieses Beweises entlediget hätte. Mit Recht fühlten Alle das Bedürfniß eines solchen Beweises, obschon es Keinem bis jetzt noch gelungen ist, denselben auf eine überzeugende Art herzustellen, wie dieses die folgende Critik bey den übrigen Versuchen dieser Art ausser Zweifel setzen wird. —

Um die Richtigkeit der Behauptung in §. 4., unabhängig von den drey vorhergehenden Sätzen darzuthun, bedient sich Clavius noch einer andern Methode, welche hier geprüft werden soll. Er will beweisen, daß die geraden Linien AC und und BD, (fig. 6.) unter der dortigen Annahme, gegen C und D immer weniger und gegen L und F immer mehr von einander abstehen, je weiter sie nach diesen Richtungen verlängert werden. Diese Behauptung enthält zwey Theile, welche ich nun nacheinander durchgehen will. Einmal soll gezeigt werden, daß die geraden AC und BD, wenn sie gegen C und D verlängert werden, immer weniger von einander abstehen, und dann soll man auch darthun, daß diese Linien in ihrer Verlängerung gegen E und F sich immer mehr von einander entfernen. Jenes hat Clavius in voller Strenge von den Perpendikeln GH, IK, ED und allen folgenden bewiesen, deren Lage durch die Perpendikel BG, HI, KC bestimmt wird. Daraus folgt denn wohl ganz richtig, daß die Linie AC in allen auf diese Art bestimmten Puncten G, I, C sich der BD mehr nähere.

Al-

Allein er übergeht hier einen sehr nöthigen Zwischensatz. Er beweißt das Nähern der Linie AC blos durch die Perpendikel, und zeigt nicht, daß der Abstand der Puncte zwischen A und G kleiner als AB und größer als GH, jener der Puncte zwischen G und I kleiner als GH und größer als IK, und endlich jener der Puncte zwischen I und C kleiner als IK und größer als CD seyn müße. Dieser Beweis kann zwar sehr leicht geführt werden (wie man unten gezeigt hat); allein auch in diesem Falle sind die Sätze des Clavius noch nicht hinreichend, den §. 4. seiner Theorie zu beweisen. Denn, obschon (Fig. 3.) $\sphericalangle A = R$, und $\sphericalangle C < R$, so folgt daraus noch nicht, daß $DB < CA$ sey. In (Fig. 6.) ist nur gezeigt, daß alle Perpendikel GH, IK, CD, und so alle folgenden, welche auf diese Art gezogen werden, immer kleiner sind. Allein es ist schlechterdings unbewiesen, daß man durch die Construction der folgenden Perpendikel auch so weit auf der AC fortrücke, um hier einmal einen willkührlichen Punct W auf derselben nothwendiger Weise zu erreichen. So lange man dieses nicht auf eine überzeugende Art darthun kann, so lange ist es eine von allem Beweise entblößte Annahme, daß $WV < AB$ sey. Da man also (Fig. 3.) nicht weiß, ob der Punkt D durch Perpendikel zwischen AB und CD je erreicht werden kann, so kann hieraus auch nicht mit Gewißheit gefolgert werden, daß $DB < CA$ sey, worauf sich doch der eine Theil des indirecten Beweises stützt, welcher daher schon in dieser Rücksicht mangelhaft ist.

In

In dem andern Theile des obigen Beweises will Clavius zeigen, daß (Fig. 6.) die geraden AC und BD, gegen E und F verlängert, sich immer mehr von einander entfernen. Allein auch hier scheitert seine Bemühung. Wollte man auch gleich annehmen, der Perpendikel AL müsse die BF, der Perpendikel LM die AE, und so die folgenden eine jede dieser beyden Linien wechselseitig schneiden, so steht der fernern Anwendung dieses Satzes eben dasjenige entgegen, was so eben von den Perpendikeln GH, IK, OD u. s. f. bemerkt worden ist. Denn es ist wieder gar kein Grund vorhanden, woraus man evident schließen könnte, daß durch die Perpendikel LM, KO, PE und die folgenden der Punct Q, dessen Abstand von A ganz unbestimmt ist, einmal wirklich erreicht werden müsse. Man kann daher (Fig. 3) daraus, daß ∡ CAB = R, und ∡ ACF > R gesetzt wird, eben so wenig mit Gewißheit schließen, daß DB > CA sey, als man oben aus ∡ CAB = R und ∡ C < R herleiten konnte, daß DB < CA seyn müsse.

Wenn man nun auch diese Darstellung für streng geometrisch halten wollte, so gründet sie sich doch wieder auf die schlechterdings unbewiesene Voraussetzung; daß der Perpendikel AL die verlängerte DB in irgend einem Puncte durchschneiden werde. Clavius sucht dieses daraus herzuleiten daß er sagt, wenn dieser Perpendikel AL die verlängerte DB nicht durchschneiden sollte, so würde die AL bey einer jeden Verlängerung ge-

gen L, nicht in die verlängerte DB kommen, und folglich wäre A unendlich weit von dieser verlängerten DB entfernt. Dieses bewiese aber noch mehr, als bewiesen werden sollte, denn man soll nur zeigen, daß $AL > GB$ wäre. Folglich müßte diese AL um so mehr $> GB$ seyn. — Wie wenig gründlich diese Darstellung ist, wird man sogleich einsehen, wenn man überlegt, daß die Schlüsse, welche beweisen sollen, daß $EP > ON$; $ON > ML$, und $ML > AB$ sey, nur dann Statt haben können, wenn man zum voraus setzt, die AL müsse die verlängerte DB wirklich schneiden. Denn man kann sich keinen Abstand eines Punctes von einer Linie denken, ohne zugleich auch anzunehmen, daß von dem Puncte zur Linie selbst eine senkrechte Linie gehe, welche diesen Abstand bemißt. Man kann also nicht sagen, die AL wird ins Unendliche verlängert, die verlängerte DB nicht schneiden, folglich ist der Abstand des Puncts A von dieser verlängerten DB größer als GB. Wenn die AG immer zunimmt, so wird sie freylich einmal $> GB$ werden; allein so lange nicht gezeigt ist, daß sie auch unter diesen Umständen in die verlängerte DB eintreffe, so lange ist der Fall nicht dargethan, worauf sich doch die Folge des Beweises gründet.

Es ist also aus dem Bisherigen erwiesen, daß die Theorie des Clavius den Namen einer berichtigten Theorie der Parallelen nicht verdient.

Zwey,

Zweyter Abschnitt.

Die Theorie des Proclus *)

Die Sätze, worauf dieser alte Geometer seine Theorie der Parallelen gründet, sind folgende.

§. 1.

Wenn man zwey gerade Linien welche einen Winkel bilden, immer mehr und mehr ohne Ende verlängert, so wird ihr Abstand einmal eine jede endliche Linie übersteigen.

Man nehme an, aus dem Puncte A, (Tab. I, Fig. 7.) seyen die beyden geraden Linien AB und AC gezogen, welche den Winkel A bilden.

*) Diese Theorie sehe man bey Clavius in dem oben angeführten Commentar über die Euclidischen Elemente S. 85. u. d. f.

Weil nun die Puncte D und E weiter von einander entfernt sind, als die Puncte F und G, eben so die Puncte B und C weiter als D und E, und so alle folgende, wenn die geraden AB und AC immer mehr verlängert werden, so ist klar, daß die äußersten Puncte derselben unendlich weit von einander abstehen, wenn die Linien selbst ins Unendliche verlängert werden. Denn wenn ihr Abstand nicht unendlich groß wäre, so könnte derselbe noch vergrößert werden, und man könnte die geraden Linien noch weiter verlängern, welches widersprechend ist, da man sie schon als unendlich verlängert annimmt. Wenn daher die geraden Linien AB und AC ins Unendliche verlängert werden, so muß ihr Abstand eine jede endliche Linie übersteigen.

§. 2.

Wenn eine gerade Linie die eine von zwey geraden und parallel laufenden Linien durchschneidet, so wird sie, in ihrer Verlängerung, auch die andere durchschneiden.

Es seyen AB und CD (Fig. 8.) zwey Parallelen, und die gerade EG schneide die AB in G. Ich sage, die gerade EG müsse, in ihrer Verlängernng, auch die CD durchschneiden.

Weil die geraden GB und GF in dem Puncte G einen Winkel bilden, so müssen sie, wenn

wenn sie verlängert werden, unendlich weit von einander abstehen (§. 1.), und ihr Abstand muß folglich auch den Abstand der Parallelen AB und CD, welcher deshalb endlich ist, weil sie gleichlaufend sind, übersteigen. Wenn daher der Abstand der GB von der GF größer ist, als jener der beyden Parallelen unter sich, so muß nothwendig die verlängerte GF die gerade CD geschnitten haben. Denn so lange GF noch zwischen den beyden Parallelen enthalten ist, so wird sie von der GB weniger entfernt seyn, als die CD von eben dieser GB, wie sich dieses von selbst schon versteht.

§. 3.

Wenn zwey gerade Linien von einer dritten geraden dergestalt durchschnitten werden, daß die beyden innern Winkel weniger als zwey rechte betragen, so werden diese zwey geraden Linien, in ihrer Verlängerung, einander auf jener Seite durchschneiden, wo die Summe der innern Winkel kleiner als zwey rechte ist.

Es werden die geraden Linien AB und CD, (Fig. 9.) von der geraden EF dergestalt geschnitten, daß $\sphericalangle BGH + \sphericalangle DHG < 2R$, so müssen diese Linien gegen B und D zusammenlaufen.

Da nämlich, nach der Annahme, $\sphericalangle BGH + \sphericalangle DHG < 2R$, und $\sphericalangle DHG + \sphericalangle DHF = 2R$, so ist $\sphericalangle BGH + \sphericalangle DHG < \sphericalangle DHG + \sphericalangle DHF$; folglich auch, wenn man beyderseits $\sphericalangle DHG$ hinwegnimmt, $\sphericalangle BGH < \sphericalangle DHF$. Wenn man nun an den Punct G einen $\sphericalangle KGH = \sphericalangle DHF$ legt, so muß der Schenkel GK über die GB fallen, und die AB in seiner Verlängerung durchschneiden. Da nun die geraden IK und CD von einer dritten EF so geschnitten werden, daß der äußere Winkel DHF dem innern entgegengesetzten KGF gleich ist, so sind diese Linien IK und CD gleichlaufend. Nun schneidet aber die gerade AB die eine von ihnen, nämlich die IK in G; folglich muß sie auch, wenn sie gehörig verlängert wird, die andere CD durchschneiden (§. 2.) und die Linien AB und CD laufen endlich zusammen.

Prüfung dieser Theorie.

Auch das System des Proclus verdient nicht den Namen einer strengen Berichtigung der Theorie der Parallelen. Schon der Lehrsatz des §. 1. ist so geeigenschaftet, daß man dem Beweise desselben zwey sehr gegründete Einwendungen entgegenstellen kann. Der Verfasser behauptet in demselben, die beyden geraden Linien A B und AC (Fig. 7.) würden sich, bey ihrer Verlängerung,

rung, immer mehr von einander entfernen, und ihr Abstand müßte einmal jede endliche Linie übersteigen. Dieser Satz enthält zwey Theile, wovon weder der eine noch der andere in strenger Form bewiesen ist. Proclus sagt nur, die Puncte D und E (welche er wahrscheinlich in gleicher Entfernung von dem Scheitelpuncte A annimmt) werden weiter von einander entfernt seyn, als die Puncte F und G, und eben so haben B und E einen größern Abstand, als D und E. Allein ist dies auch ein geometrischer Beweis, oder nicht vielmehr eine blos willkührliche Annahme? Kein gründlicher Geometer wird sich hier auf den Augenschein berufen und behaupten, dieser lehre es schon, daß sich die Schenkel AB und AC immer mehr und mehr von einander entfernen. Denn man weiß ja wohl, daß man die sinnlichen Beweise von streng geometrischen wohl unterscheiden müsse, und daß ein Satz, der auf einer bloßen Erfahrung beruht, keine Stelle in der Reihe theoretisch zu beweisender Sätze verdiene.

Schon diese allgemeine Bemerkung wäre hinreichend, der Theorie des Proclus den gebührenden Grad der Evidenz abzusprechen. Allein es giebt wirklich ein strenger Beweis für diesen Satz; und auch in dem Falle, wo man diesen für die mangelhafte Darstellung des Proclus substituiren wollte, würde sein System, wie die Folge lehren wird, dennoch nicht überzeugend seyn.

Clavius beweiset diesen Lehrsatz des Proclus auf folgende Art.

Es sey $\sphericalangle CAB$ (Fig. 10.) der gegebene Winkel. Man nehme in dem Schenkel AC die willkührlichen Puncte D und C an, und ziehe aus ihnen auf den andern Schenkel AB die Perpendikel DE und CB, so wird $CB > DE$ seyn. Denn wenn CB nicht $> DE$ wäre, so müßte entweder $CB = DC$ oder $CB < DE$ seyn. Man setze $CB = DC$, und nehme auf AB aus B gegen A die $BF = EA$, so fällt der Punct F entweder zwischen A und E und z. B. in F, wie man hier annimmt, oder dieser Punct liegt in E, oder zwischen E und B, welches für den Beweis das nämliche ist. Zieht man nun die gerade FC, so wäre wegen $AE = FB$, $ED = BC$, und $\sphericalangle AED = \sphericalangle ABC = R$, das $\triangle AED \cong \triangle FBC$, und folglich $\sphericalangle A = \sphericalangle CFB$, welches widersprechend ist, da $\sphericalangle A < \sphericalangle CFB$ seyn muß. Folglich kann CB nicht $= DC$ seyn. Setzte man aber $CB < DE$, so nehme man in der Verlängeruug von BC einen Punct G, so, daß $GB = DE$, und ziehe nun die gerade GF. In diesem Falle ist wieder, wegen $AE = FB$, $ED = BG$, und $\sphericalangle AED = \sphericalangle ABG = R$, das $\triangle ADE \cong \triangle FGB$, und es wäre $\sphericalangle A = \sphericalangle GFB$, welches nicht seyn kann. Daher ist auch CB nicht $< DE$. Folglich muß $CB > DE$ seyn, und der Schenkel AC des $\sphericalangle A$ hat in dem Puncte C einen größern Abstand vom Schenkel AB, als in dem Puncte D. Ueberhaupt

haupt folgt hieraus, daß alle folgenden Puncte, welche auf der verlängerten AC genommen werden, immer noch weiter von der AB entfernt seyn müssen.

So strenge und bindend nun auch der Beweis dieses Satzes ist, so wenig kann man jedoch dasjenige mit Evidenz daraus herleiten, was Proclus in dem zweyten Theile des ersten Satzes behauptet. Denn obschon nunmehr mit völliger Strenge bewiesen ist, daß die Schenkel des ∢ A sich immer mehr und mehr von einander entfernen müssen, so folgt hieraus noch nicht so geradezu, daß dieser Abstand auch einmal größer, als eine jede endliche Linie werden müsse. Gleichwie man aus einem immerwährenden Kleinerwerden dieser Abstände nicht auf eine Abnahme bis o, d. h. bis auf ein gänzliches Verschwinden derselben schließen kann, eben so wenig ist man auch berechtigt, aus ihrem fortwährenden Größerwerden ein Wachsthum ins Unendliche abzuleiten. Denn es giebt Linien, welche einander immer näher und näher kommen, ohne sich je wirklich zu erreichen, und umgekehrt hat man Linien, welche sich immer weiter von einander entfernen, ohne daß sie hierbey eine bestimmte endliche Entfernung übersteigen. Wenn man aus dem Nähern zweyer Linien ihr Zusammenlaufen, oder aus dem Entfernen derselben einmal einen unendlichen Abstand folgern will, so muß das Verhältniß bestimmt seyn, nach welchem jenes Annähern, oder dieses Entfernen geschieht. So lange dies der Fall nicht ist,

ist, so lange werden alle solche Schlüsse blos analogische Folgerungen und keine geometrische bewiesene Sätze seyn. Es ist demnach klar, daß der erste Satz des Proclus nichts anders, als eine ganz unbewiesene Behauptung sey.

Der Beweis von §. 2. gründet sich zum Theil auf den unbewiesenen Lehrsatz des §. 1., und zum Theil auf eine Annahme, deren Richtigkeit Proclus ebenfalls auf keine überzeugende Art dargethan hat. Er sagt, der Abstand der beyden Parallelen AB und CD sey endlich. Obschon diese Behauptung sehr richtig ist, so folgt sie doch aus den Vordersätzen des Proclus nicht. Diese Linien AB und CD könnten sich gegen A und C immer mehr und mehr nähern, ohne einander je zu durchschneiden, und gegen B und D sich immer weiter von einander entfernen, d. h. sie könnten nach der Erklärung des Proclus, parallel seyn, und ihr Abstand gegen B und D könnte größer, als eine jede angegebene Größe werden, wo es denn gar nicht bewiesen wäre, daß die verlängerte EGF diese CD, in ihrer Verlängerung, nothwendig schneiden müßte.

Da sich nun diese Theorie des Proclus, wie aus dem Vorhergehenden erhellet, auf zwey, nicht mit geometrischer Schärfe bewiesene, Vordersätze stützt, so ist klar, daß dieselbe auf den Namen einer strengen Demonstration oder einer befriedigenden Berichtigung der Theorie der Parallelen keinen Anspruch zu machen befugt ist.

Drit-

Dritter Abschnitt.

Die Theorie

von

J. K. F. Hauff *)

Prof. zu Marburg.

Der Verfasser nimmt in seiner Berichtigung der Euclidischen Theorie der Parallelen folgenden Gang:

§. 1.

Lehrsatz.

In jedem Dreyecke sind die drey innern Winkel zusammen zwey rechten gleich. Im Dreyecke ABC ist $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 2R$.

Be-

*) Archiv der reinen und angewandten Mathematik, herausgegeben von C. Fried. Hindenburg. Neuntes Heft. 1799. No. VI.

Beweis.

Man halbire (Tab. II. Fig. 1.) die Seite AC des Dreyecks ABC in dem Puncte D, ziehe die BD und verlängere sie bis DF = BD ist, alsdann ziehe man die AF, CF. Da nun AD = DC, BD = DF, ∢ ADF = ∢ BDC, so ist AF = BC, ∢ DAF = ∢ DCB, ∢ AFD = ∢ DBC. Da ferner AD = DC, BD = DF, ∢ ADB = ∢ CDF, so ist AB = FC, ∢ ABD = ∢ DFC, ∢ DAB = ∢ DCF. Da endlich BC = AF, AB = FC, ∢ DBC = ∢ AFD, und ∢ ABD = ∢ DFC, folglich auch ∢ ABC = ∢ AFC, so ist △ ABC ≌ △ AFC. Beschreibt man nun auf der Seite BC durch die nämliche Construction das △ BCG, so kann eben so bewiesen werden, daß △ ABC ≌ △ BCG sey. Da nun zuvor bewiesen worden, daß △ ABC ≌ △ AFC, so ist △ AFC ≌ △ ABC ≌ △ BCG, folglich ∢ ACF = ∢ BAC = ∢ A, ∢ BCG = ∢ ABC = ∢ B, und mithin ∢ ACF + ∢ ACB + ∢ BCG = ∢ A + ∢ C + ∢ B. Wäre nun FCG eine gerade Linie, so wäre ∢ ACF + ∢ ACB + ∢ BCG = 2 R, folglich auch ∢ A + ∢ C + ∢ B = 2 R.

Daß aber FCG eine gerade Linie sey, kann auf folgende Art gezeigt werden. Wäre FCG keine gerade Linie so müßte, da FC sowohl, als CG eine solche ist, die gerade Linie von F nach G über oder unter dem Puncte C vorbeygehen.

hen. Im letzten Falle müßte sie eine Lage haben, wie FHG. Es sey also FHG diese gerade Linie, so schlösse sie mit CF und CG ein gleichschenklichtes Dreyeck ein. Man halbire also die Grundlinie FHG dieses Dreyecks in dem Puncte H, und ziehe aus der Spitze C nach H die Linie CH. Hierauf fälle man von einem willkührlichen Puncte I der Linie CH ein Loth auf den Schenkel CG. Da nun, nach der Voraussetzung, ∢ FCG < 2 R, und ∢ FCG durch CH halbirt wird, folglich ∢ HCG < R ist, so muß dieses Loth der Linie CH zur rechten Hand fallen, es muß also eine Lage haben, wie IK. Es sey also IK dieses Loth, so muß es sich auch rückwärts in gerader Richtung verlängern lassen, und da es durch den Punct I innerhalb des Dreyecks geht, verlängert den Umfang des Dreyecks noch einmal schneiden. Man verlängere also das Loth IK in gerader Richtung, und es schneide die Grundlinie des Dreyecks in dem Puncte L. Hierauf fälle man von einem Puncte der Linie AB, z. B. von A auf die Linie KL das Loth AM, und ziehe die AK. Da nun (p constr.) ∢ AMK = R, und ∢ MKC = R, aber ∢ AKM > ∢ MKC, so ist ∢ AMK + ∢ AKM > 2 R, welches unmöglich ist. Wollte man annehmen, die Verlängerung von IK treffe die Winkelspitze I, oder den Schenkel CF, so fänden die nämlichen Schlüsse Statt. Die gerade Linie von F nach G kann also nicht unter dem Puncte C vorbeygehen. Eben so kann gezeigt werden, daß sie auch nicht über dem Puncte C vorbeygehen könne,

folglich muß sie durch den Punct C selbst gehen. Geht sie aber durch den Punct B, so ist sie keine andere, als die FCG. Demnach ist FCG eine gerade Linie, und mithin, nach dem Obigen, $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 2R.$ w. z. e. w.

§. 2.

Lehrsatz.

Wenn man zwey ungleiche Größen hat, und von der größern die Hälfte, oder mehr als die Hälfte, und vom Reste wieder die Hälfte, oder mehr als die Hälfte wegnimmt, und dies immer so fortsetzt, so bleibt zuletzt eine Größe übrig, die kleiner ist als die kleinere der anfangs gesetzten Größen.

Den Beweis hiervon führt der Verfasser nicht an, sondern beruft sich auf Euclids Elemente Lib. X, prop. 1., wo sich derselbe befindet. Ohnehin kann dieser Satz als Lehrsatz hier supplirt werden.

§. 3.

Aufgabe.

Wenn eine Seitenlinie GH, (Fig. 2.) und ein anliegender Winkel GHD ge-

gegeben ist, mit beyden ein Dreyeck zu verzeichnen worin der Winkel, welcher der gegebenen Seite GH gegenüberliegt, kleiner sey als jeder gegebene geradlinichte Winkel.

Auflösung und Beweis.

In dem Schenkel HD, dessen Länge unbestimmt ist, nehme man, nach Willkühr, einen Punct M an, und ziehe die GM. Hierauf nehme man MN = GM, und ziehe die GN, so ist ∢GNH = $\frac{1}{2}$∢GMH *). Man nehme ferner NO = NG, und ziehe die GO, so ist aus eben dem Grunde ∢GON = $\frac{1}{2}$∢GNH, also ∢GON = $\frac{1}{4}$∢GMH. Setzt man dieses Verfahren noch weiter fort, so wird in jedem nachfolgenden Dreyecke, der an der rechten Hand liegende Winkel der Grundlinie mit dem einen der gleichen Schenkel halb so groß, als er im Vorhergehenden war, und mithin (§. 2.) einmal kleiner als jeder gegebene geradlinichte Winkel w. z. e. w.

§. 4.

*) Denn aus (§. 1.) wird ∢GMH = ∢MGN + ∢GNH, folglich auch, weil, wegen MG = MN, ∢MGN = ∢GNH ist, ∢GMH = 2∢GNH, oder ∢GNH = $\frac{1}{2}$∢GMH.

§. 4.

Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien CD, KL von einer dritten EF so geschnitten werden, daß die beyden innern, an einerley Seite der schneidenden EF liegenden, Winkel LGH, GHD zusammen kleiner, als zwey rechte sind, so treffen die beyden Linien CD, KL, verlängert an eben der Seite zusammen.

Beweis.

Man nehme $\angle EGB = \angle GHD$, so ist, weil $\angle EGB = \angle BGH = R$, auch $\angle BGH + \angle GHD = 2R$; folglich $\angle LGH + \angle GHD < \angle BGH + \angle GHD$, und mithin $\angle LHG < \angle BGH$. Demnach liegt GL zwischen BG und GH, und BGL ist also ein gegebener Winkel. Man nehme nun GH, und den anliegenden $\angle GHD$ als gegebene Stücke an, und beschreibe (vor. Aufg.) über GH ein Dreyeck, worin der $\angle GOH$, der Seite GH gegenüber, kleiner, als $\angle BGL$ ist. Alsdann hat man $\angle GHO + \angle HGO + \angle BGO = 2R = \angle GHO + \angle HGO + \angle GOH$, (vor. Lehrs.), folglich $\angle BGO = \angle GOH$. Nun ist (per constr.) $\angle GOH < \angle BGL$, also auch $\angle BGO < \angle BGL$, und mithin liegt GL zwischen dem Schenkel GH und GO des $\angle HGO$, und muß also verlängert mit

HO

HO zusammentreffen. Denn da sie einmal durch den Punct L innerhalb des Dreyecks geht, jede gerade Linie aber, die durch einen Punct innerhalb einer Figur geht, den Umfang der Figur zum wenigsten in zwey Puncten schneiden muß, wie aus dem Begriffe der geradlinichten Figur folgt, so muß die GL den Umfang des Dreyecks HGO in zwey Puncten schneiden. Nun ist einer dieser Durchschnittspuncte die Spitze des ∠G. Läge also der andere Durchschnittspunct nicht in der dem ∠G gegenüberliegenden Seite HO, so müßte er in einer der Seiten GH, GO liegen. Alsdann aber schlössen zwey gerade Linien einen Raum ein, welches unmöglich ist. Die GL oder KL muß also verlängert die HO schneiden, w. z. e. w.

Prüfung dieser Theorie.

Aus einer kurzen Uebersicht dieser Theorie ergiebt es sich sogleich, daß der Lehrsatz des §. 1. die Stütze ist, worauf der Verfasser seine ganze Berichtigung gründet. Hält der Beweis dieses Satzes die strenge geometrische Probe aus, so fließet dessen übrige Darstellung mit einer unumstößlichen Evidenz aus demselben her. Hat hingegen dieser Grundstein ein wesentliches Gebrechen, so stürzt auch mit ihm das ganze System der Berichtigung auf einmal zusammen.

Wirft man aber einen prüfenden Blick auf den Beweis dieses Lehrsatzes, so erhellet sogleich, daß derselbe eigentlich darauf beruhe, zu zeigen, die beyden geraden Linien FC und CG lägen in einer einzigen geraden Linie FG. Dieses will der Verfasser auf eine indirecte Art bewerkstelligen. Es soll nämlich die Annahme, FCG sey keine gerade Linie, auf ein Dreyeck AMK führen, worin die beyden Winkel AMK und AKM zusammengenommen größer, als zwey rechte wären, welches widersprechend ist. Hieraus müßte man denn auf die Falschheit der Annahme schließen, aus welcher dieser Widerspruch folgt. Diese Annahme hieße aber: FCG ist keine gerade Linie. Folglich muß FCG wirklich eine gerade Linie seyn.

Da sich bey dieser Darstellung Alles auf die Construction des △AMK bezieht, so muß sogleich gefragt werden: wie entsteht denn dieses Dreyeck? — Man antwortet, dadurch, daß von einem Puncte in AB, z. B. aus A ein Perpendikel AM auf KL gefällt, und nachher die gerade AK gezogen wird. Nun ist zwar keinem Zweifel unterworfen, daß, weil der Punct A der Linie AB sich ausserhalb der KL befindet, von jener auf diese ein Loth möglich sey. Allein, wodurch wird denn wohl bestimmt, daß dieses Loth auch gerade jene Lage haben müsse, welche es in der Figur hat, nach der es die gegen M verlängerte KI durchschneidet? — Muß nicht eben so wie die Lage des Perpendikels IK durch den spitzen

Win-

Winkel ICK bestimmt wurde, nun auch hier jene des Loths AM auf KL gerechtfertigt werden? Muß nicht vielmehr dieser Perpendikel, wegen $\sphericalangle AKL > R$, gerade auf die entgegengesetzte Seite der AK in die gegen K verlängerte IK eintreffen? — Da also hierüber kein strenger Beweis geführt ist, so stützt sich die ganze Darstellung auf eine blos willkührliche Annahme der Lage dieses Perpendikels, und es ist klar, daß dieser indirekte Beweis, dem es an einem Haupterforderniß gebricht, den Namen einer streng geometrischen Demonstration bey weitem nicht verdiene.

Der Verfasser des gegenwärtigen Systems liefert noch im angeführten Archive (Heft 10. No. 4.) einen Nachtrag zu dem neuen Versuche seiner Berichtigung der Euclidischen Theorie der Parallelen, worin er es unternimmt, den Lehrsatz, daß die Summe der drey Winkel eines jeden Dreyecks zwey rechten gleich ist, auf eine directe Art zu beweisen. Da sich nun dieser directe Beweis vorzüglich auf den Lehrsatz im §. 2. des obigen Nachtrags gründet, so soll dieser hier zuerst wörtlich angeführt, und sodann wieder näher geprüft werden.

Lehrsatz.

Eine Linie, die von einer geraden in allen Puncten gleiche Entfernung hat, ist selbst gerade. Die Linie GEK

 (Fig.

(Fig. 3.) habe von der geraden AL in allen Puncten einerley Entfernung, GM = EN = KO, so behaupte ich, daß GEK eine gerade Linie sey.

Beweis.

Man setze die Entfernung der Linie GEK von der AL, die (p. hyp.) in in allen Puncten = GM = EN = KO ist, sey veränderlich und könne durch gleichförmige und gleichzeitige Abnahme von der Größe GM bis auf Null vermindert werden, so wird in demselben Augenblicke, da GM = o ist, folglich der Punct G mit der M zusammenfällt, der Punct E mit dem N, und der Punct K mit dem O zusammenfallen. Eben so wird von allen übrigen Puncten der Linie GEK jeder auf seinen zugehörigen Punct in der Linie AL fallen. — Denn fiele während G auf M, und K auf O liegt, irgend ein Punct der Linie GEK über oder unter die Linie AL, so müßte die anfängliche Entfernung dieses Puncts von der Linie AL im ersten Falle kleiner, im andern aber größer, als GM gewesen seyn, wovon das Eine, wie das Andere der Voraussetzung widerspricht. — Alsdann aber wird die ganze Linie GEK den Theil MO der geraden Linie AL decken, und selbst diesen Theil vorstellen. Eine Linie aber, die ein Theil einer geraden Linie werden kann, muß selbst gerade seyn, weil es aus dem Begriffe der geraden Linie folgt, daß jeder ihrer Theile auch gerade ist. Folglich ist GEK eine gerade Linie. w. z. e. w.

Prü-

Prüfung dieses Beweises.

Auch dieser Beweis gewährt keine volle Ueberzeugung, und verdient so wenig, als der vorige den Namen einer strengen Demonstration. Im Anfange desselben heißt es, daß in dem Augenblicke, wo GM = o ist, folglich der Punct G mit M zusammenfällt, auch der Punct K mit dem O zusammentreffen werde. Allein wie ist dieses bewiesen? Offenbar bedarf diese Behauptung, da sie nichts weniger als evident ist, eines Beweises zu ihrer Rechtfertigung, den der Verfasser übergeht. Wollte man etwa sagen, die gleichförmige und gleichzeitige Abnahme des Abstandes GM bis o sey die Ursache davon, so kann man sich doch die Abnahme dieses Abstandes nur so vorstellen, daß entweder die Linie GE, mit dem an G unveränderlich bleibenden Winkel EGM, durch ihre Bewegung in der GM, sich der geraden ML immer mehr und mehr nähere, bis endlich G wirklich in M eintrifft; oder man muß sich denken, die beyden gleichgroßen Perpendikel GM und EN seyen in gleichviele und folglich auch gleichgroße Theile abgetheilt, und die Linie GE nähere sich der AL jetzt dadurch, daß sie sich in diesen gleichen Abschnitten auf GM und EN fortbewegt, wodurch endlich G einmal in M, und E in N kommen soll. — Nun kann man aber leicht zeigen, daß weder diese noch jene Vorstellungsart einen hinreichenden Grund zur Rechtfertigung der obigen Behauptung enthalte, und daß diese in jedem Falle von allem Beweise entblößt

sey.

sey. Denn man nehme einmal das Erste an, so könnte nur dann, in dem Augenblicke, wo G in M kömmt, auch E in die Linie ML fallen, wenn bewiesen wäre, der Winkel EGM müßte nothwendig = R seyn. Könnte nämlich dieser Winkel < R, oder > R seyn, so müßte, wenn G in M liegt, der Punct E in jenem Falle über, und in diesem unter die ML fallen, wie dieses aus bekannten Sätzen von dem ebenen Winkel erhellet. Da aber diese Annahme ∢EGM = R nirgends bewiesen ist, so ist auch die obige Behauptung hierdurch nicht begründet, und dies um so weniger, als nicht einmal dargethan ist, E werde, unter diesen Umständen, in irgend einen Punct der AL fallen, wenn G in M gekommen ist. Wollte man aber das Zweyte setzen, so müßte, wenn der Lehrsatz hierdurch begründet werden sollte, zuvor außer Zweifel gesetzt seyn, die Linie GE werde in allen Puncten, welche in GM und EN von G und E gleichweit entfernt sind, eben die Lage haben, wie in G und E, d. h. der eine Endpunct G müsse immer in GM bleiben, da der andere E sich durch den Perpendikel EN bewegt. Da es nun noch gar nicht bewiesen ist, ob eine gerade Linie von G in E so groß sey, als alle gerade Linien, welche man sich aus Puncten in GM und EN, welche gleichweit von G und E abstehen, denken kann: so ist auch nie mit Gewißheit zu behaupten, die Linie GE werde auf diese Art einmal auf die MN fallen müssen. Denn wenn GM und EN z. B. halbirt wären, und der Punct G der Linie GE, durch Bewegung

dieser

dieser Linie gegen AL, einmal in diesen Halbirungspunct fiele, so kann man doch keinesweges wissen ob E auch in die Hälfte von EN kommen werde, sondern nicht sowohl auf eine oder die andere Seite von EN fallen könne. Es ist also offenbar, daß die Annahme, die Puncte E, K fielen in dem Augenblicke in N und O, wenn G in M rückt, lediglich willkührlich, und ohne allen strengen Beweis sey.

Aus diesem unbewiesenen Satze wird nun noch auf die Zwischenpuncte in GEK weiter geschlossen, und von ihnen behauptet, daß ein jeder derselben auf den ihm zugehörigen Punct der Linie AL fallen müsse. Der Grund, welcher hiervon angegeben wird, beruht wieder, wie man von selbst sieht, auf der eben bemerkten Annahme. Daher ist auch die Behauptung von diesen Zwischenpuncten den nämlichen Zweifeln ausgesetzt. Am Ende des Beweises wird nun noch daraus, daß ein jeder Punct zwischen G und K auf einen ähnlich liegenden in ML fallen müsse, der Schluß gemacht, daß die ganze Linie GEK den Theil MO der geraden Linie AL nothwendig decken werde, welches jedoch ebenfalls nicht angenommen werden kann. Denn keine Linie besteht aus Puncten, sondern die Theile der Linien sind wieder Linien, und die geraden sind aus geraden, und die krummen aus krummen Linien zusammengesetzt. Aber man kann in jeder Linie Puncte annehmen, wo man nur immer will, weil sie überall begrenzt seyn kann, und diese Grenzen eben die geometrischen Puncte sind. Man kann aber in keiner Linie

nie zwey Punkte so nahe beysammen annehmen, daß zwischen ihnen nicht noch eine Linie enthalten wäre; denn könnte man dieses, so müßten diese Puncte sich unmittelbar berühren, und die Linie bestände aus Puncten. Daher läßt sich die Frage: ob eine gegebene Linie eine gerade oder eine krumme sey, nicht aus der Lage ihrer Endpuncte gegeneinander beurtheilen. Man muß vielmehr die Grenzen der Linien von dem zwischen diesen Grenzen enthaltenen, d. h. dem Begrenzten, wohl unterscheiden. Die Deckung zweyer Linien erfordert daher nicht bloßes Aufeinanderfallen der Grenzen, sondern auch ein vollkommenes Ineinanderfallen des Begrenzten. Bey geraden Linien ist freylich ein bloßes Aufeinanderliegen der Grenzpuncte derselben zur Deckung schon hinreichend, weil es durch diese Puncte nur eine einzige gerade Linie giebt. Will man aber von einer gegebenen Linie dadurch bezeigen, daß sie eine gerade seyn müsse, weil sie, auf diese gerade gelegt, dieselbe decken werde, so muß nicht nur gezeigt werden, daß die Grenzen der gegebenen auf die gerade Linie fallen, sondern man muß auch beweisen, daß eben dieses von dem Begrenzten statt haben werde. So lange also nur bewiesen ist, daß, wenn zwey Puncte der gegebenen Linie auf die gerade fallen, auch jeder zwischen ihnen angenommene dritte Punct in diese letztere fallen müsse, so ist hierdurch noch keineswegs ausser Zweifel gesetzt, daß diese gegebene auch eine gerade Linie seyn müsse; denn die gegebene Linie wird durch dieses Verfahren nur in mehrere kleinere ihr ähnliche,

liche, abgetheilt, wovon denn immer wieder nur die Grenzen, nicht aber das Begrenzte selbst, in die gerade Linie fallen, so daß folglich von diesen geraden Linien immer wieder zu beweisen bleibt, was von der ganzen hätte bewiesen werden sollen. Und da es hierbey nicht darauf ankömmt, ob die Linien groß oder klein, und wie klein sie seyen, so ist hierdurch so viel als nichts bewiesen. Denn die Construction der Linien KO, EN bleibt gegen GM im Wesentlichen immer die nämliche; nur rücken die neuen Perpendikel der GM immer näher und näher bis ins Unendliche. Man kann daher immer wieder nach einem Beweise für diesen Fall fragen, und da diesem Fragen durch die Art des Beweises selbst nie Grenzen gesetzt sind, so ist derselbe auch deshalb unvollständig, indem er sich niemals schließet.

Vierter Abschnitt.

Die Theorie von Bossut.

I.

Aeltere Theorie.*)

§. 1.

In dieser ältern Theorie giebt der Verfasser folgende Erklärung von Parallelen; er sagt:

Zwey gerade Linien KH und MN (Tab. II. Fig. 4.), die in einerley Ebene liegen, sind parallel, wenn sie, von einer dritten geraden CD geschnitten, auf einer Seite dieser Linie die gleichen Winkel CEH und CFN machen.

Die

*) Man sehe: Traité élémentairé de Géométrie par M. l'Abbé Bossut à Paris 1777. in 8. I. partie. Chapitre III.

Die gerade CD nennt er Richtungslinie (directrice).

§. 2.

Auf diese Definition baut er nun folgende Zusätze:

I. Wenn die Richtungslinie CD (Fig. 5.) auf einer der Parallelen KH senkrecht steht, so ist sie auch auf der andern senkrecht.

Denn wenn von zwey gleichen Winkeln CEH und CFN der erste ein rechter ist, so muß es auch nothwendig der andere seyn. Auch steht umgekehrt jede der zwey Parallelen KH und MN auf der Richtungslinie senkrecht.

§. 3.

II. Zwey Parallelen KH and MN sind allenthalben gleichweit von einander entfernt. (Fig. 6.)

Denn wenn man von zwey beliebig von einander entfernten Puncten F und L die Linien FE und LG auf KH senkrecht zieht, so wird jede dieser Linien auch auf MN senkrecht seyn (§. 2.). Die vier Winkel FEG, EGL, GLF und LFE sind daher rechte. Auf der Mitte von EG, in O errichte man OP senkrecht, welche die

MN

MN irgendwo in P schneiden, und bey O und P rechte Winkel bilden wird. Wenn man sich nun vorstellt, daß das Rechteck OGLP um OP eine halbe Umdrehung macht, während daß das Rechteck EOPF unbeweglich bleibt: so wird, wegen der rechten Winkel bey O, die Linie OG auf EO und wegen OG = OE, der Punkt G auf E fallen. Ferner fällt wegen der rechten Winkel EGL und KEF, die Linie GL auf EF, und wegen OPL = R = OPF, die PL auf PF. Hieraus erhellt also deutlich, daß das Rechteck OGLP das Rechteck EOPF decke, und daß folglich GL = EF sey.

Prüfung dieser Theorie.

Die Erklärung, welche der Verfasser von den Parallelen zum Grunde legt, scheint einigermaaßen mit der Euclidischen übereinzukommen. Denn wenn (Fig. 4.) der Winkel CEH = CFN. so ist auch ∢ CEH + ∢ EFN = 2 R, die MN und KH stoßen auf keiner Seite der DC zusammen und sind demnach parallel. Sie ist aber doch deswegen zu tadeln, weil sie zu enge ist und nur eine Bedingniß ausdrückt, unter welcher der Parallelismus möglich wird, die aber doch gewiß nicht die einzige ist. Der Beweis über die Möglichkeit eines Begriffs soll freylich seiner Definition

tion vorangehen; allein man muß hier das logische Möglichseyn von der Construction unterscheiden. Es ist nämlich gewiß logisch möglich, das heißt, es hat keinen Widerspruch, sich zwey gerade Linien in einerley Ebene zu denken, die sich niemals durchschneiden können. Soll man aber diesen Begriff construiren, so muß man die Bedingnisse aufsuchen, unter welchen dieses möglich wird; wobey es sich ergiebt, daß wir zur Construction der Parallelen, wie bekannt, mehr als Eine Bedingung haben. Das eben Gesagte soll besonders dazu dienen, die Meinung derjenigen zu widerlegen, die dafürhalten, daß die Euclidische Definition der Parallelen unphilosophisch sey, weil sie etwas definire, dessen Möglichkeit man zuvor nicht dargethan habe. Der Verfasser scheint dieselbe Meinung zu hegen, weil er von dieser Euclidischen Definition, die nach ihm die größten Mathematiker annahmen, abweicht.

Läßt man indessen seine Definition dahin gestellt seyn, so folgt der im §. 2. angeführte Satz doch keineswegs aus derselben. Denn angenommen, es seyen MN und KH deswegen parallel, weil ∢ CFN = ∢ CEH, so folgt wohl hieraus, daß ∢ EFN + ∢ FEH 2 = R. Läßt man aber aus F das Loth FG auf KH fallen, so folgt daraus, daß ∢ CFN = ∢ CEH, noch keineswegs, daß auch ∢ x + ∢ y = 2 R sey, und es ist noch gar nicht bewiesen, daß, wenn ∢ y = R ist, nun auch ∢ x = R seyn müsse.

Der

Der Verfasser hätte nämlich zuvor zeigen müssen, wie sich jede schiefe Lage der Richtungslinie CD auf eine senkrechte, wie (Fig. 5.) vorstellt, zurückbringen läßt.

Da nun der Satz in §. 3. auf diesen gestützt ist, und diesem letztern offenbar die erforderliche Evidenz gebricht, wie ich so eben gezeigt habe: so fällt er mit ihm zusammen und bedarf daher keiner weitern Untersuchung.

Den Satz, daß, wenn (Fig. 4.) $\angle CFN \gtrless \angle CEH$ ist, die Linien MN und KH sich durchschneiden müssen, berührt der Verfasser mit keiner Sylbe, da es doch der Hauptsatz ist, worauf die ganze Schwierigkeit der Theorie der Parallelen beruht. Hierdurch wird denn die, zu Anfang dieser Untersuchung, geäußerte Meinung noch mehr bestärkt, daß der Verfasser die Schwierigkeit dieser Theorie mehr zu verstecken als zu heben suchte; eine Meinung, der man um so mehr beytreten kann, als sich selbst Lacroix und Legendre mit Recht über diejenigen Autoren beschweren, welche von dieser Schwierigkeit nicht einmal Meldung thun.

Ich will nun zu der neuern Theorie der Parallelen des Verfassers schreiten, und sehen was er hierin geleistet hat.

II.

Neuere Theorie.*)

Diese neuere Theorie gründet sich auf folgende Sätze:

§. 1.

Wenn man in allen Puncten C, C, C, C einer geraden Linie AB (Fig. 7.) auf dieselbe die gleichen Perpendikel CD, CD, CD, CD errichtet, und nachher von jedem Puncte D auf den nächsten D eine kleine gerade Linie zieht: so bildet die Verbindung aller dieser kleinen Linien eine stetige Linie, die der Verfasser eine mit AB parallele nennt.

Aus dieser Definition zieht er nun folgenden Zusatz.

§. 2.

Die Linie DDDD ist eine gerade; denn weil alle Puncte D gleichweit von der geraden AB entfernt sind, so ist klar, daß die Linie

D

*) Man sehe: Cours de Mathématiques par Charles Bossut; tome second, nouvelle édition, à Paris 1800, Geometrie I Part. Chapitre IV.

DDDD an keinem Orte ihrer Ausdehnung weder concav, noch convex gegen AB seyn kann, und daß sich daher alle Puncte in einer und derselben geradlinichten Richtung EF befinden müssen. Wenn man sich vorstellt, daß jede der geraden gleichen DC, DC u. s. f., die keine bestimmte Länge haben, sich um die nämliche Größe beständig verkleinern, indem die gerade AB unbeweglich bleibt: so werden alle Puncte D, während sie sich den Puncten C nähern, sowohl unter sich als gegen AB, allezeit die nämliche Lage behalten. Haben sich nun die Linien CD bis auf Null vermindert, so fallen die Puncte D mit den Puncten C zusammen, und die ganze Linie EF legt sich auf die gerade AB, welches nicht geschehen könnte, wenn EF nicht selbst eine gerade Linie wäre.

§. 3.

Es sey (Fig. 8.) EF mit AB parallel. Nimmt man nun in AB irgend einen Punct C an, und errichtet aus demselben über AB einen Perpendikel CD, welcher die EF in D schneidet: so wird CD auch auf EF senkrecht seyn.

Man mache CK = CG und nachdem man auf die Puncte H und G die Perpendikel KL und GH errichtet hat, so ziehe man die Diagonalen CL und CH. Weil nun EF mit AB parallel,

so

so ist KL = GH (§. 1.) und daher sind die rechtwinklichten Dreyecke CKL und CGH gleich, wegen KC = CG, LK = HG und ∢ K = R = ∢ G; folglich ist auch ∢ KCL = ∢ GCH und CL = CH. Zieht man nun die Winkel KCL und GCH von den rechten Winkeln HCD und GCD ab, so bleibt ∢ LCD = ∢ HCD und die Dreyecke CLD und CDH sind gleich und ähnlich, weil zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel des einen gleich sind zweyen Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel im andern. Es ist daher ∢ CDL = ∢ CDH; also jeder ein rechter, und folglich CD auf EF senkrecht.

Aus diesem Satze zieht der Verfasser nun folgende Zusätze:

§. 4.

Wenn (Fig. 7.) die Linie EF mit AB parallel angenommen wird, so kann man auch umgekehrt sagen, daß AB mit EF parallel sey, weil die gleichen auf AB senkrechten Linien CD, CD, u. s. f. auch eben so auf der EF senkrecht sind.

§. 5.

Zwey Parallelen AB und EF sind allenthalben gleichweit von einander entfernt, weil sie in jedem ihrer Puncte auf einer Reihe gerader gleicher Linien CD, CD u. s. f. senkrecht stehen,

von welchen jede die Entfernung des Puncts D von AB oder die des Puncts C von EF ausdrückt.

§. 6.

Man ziehe (Fig. 9.) auf die Parallelen AB und EF die Perpendikel CD und MN. Trägt man nun auf einer Seite derselben in AB die Linien $CR = MO$, und zieht die schiefen RD und ON, so wird $RD = ON$, auch $RO = DN$ seyn. Denn $\angle RCD = R = \angle OMN$; $CD = MN$ (§. 5.) und $RC = OM$ nach der Annahme. Folglich ist $\triangle RCD \underset{S}{\cong} \triangle OMN$, daher $RD = ON$. Man ziehe nun die Linie DM, so ist $\triangle CDM \underset{S}{\cong} \triangle NDM$, weil die Hypotenuse gemeinschaftlich, und die Seite CD gleich MN ist. Folglich hat man $CM = DN$; aber es ist $CM = CO + OM = CO + CR - RO$; daher auch $RO = DN$.

§. 7.

Wenn die Parallelen AB und EF, (Fig. 10.) von einer geraden Linie KL geschnitten werden, so ist $\angle HDB = \angle EHD$.

Denn man fälle von den Puncten H und D auf die Parallelen die Perpendikel HO, DG, so sind die rechtwinklichten Dreyecke wegen $GD = HO$ und der gemeinschaftlichen Hypotenuse DH gleich

gleich und ähnlich; folglich ∢ HDB = ∢ EHD.

§. 8.

Hieraus folgert nun der Verfasser, daß ∢ HDB = ∢ KHF; ferner daß ∢ FHD + ∢ BDH = 2 R, wie dies auch leicht einzusehen ist.

§. 9.

Umgekehrt; wenn zwey gerade Linien AB und EF (Fig. 11.) von einer dritten geraden LK so geschnitten werden, daß ∢ HDB = ∢ EHD, so sind AB und EF parallel.

Denn gesetzt es sey EF nicht parallel mit AB, so kann man durch den Punct H die gerade ef mit AB parallel legen. Hier wird ∢ eHD = ∢ HDB seyn, folglich wäre ∢ eHD = ∢ EHD, welches unmöglich ist.

§. 10.

Die fernern Sätze, daß die Linien AB, EF auch dann parallel sind, wenn der innere Winkel gleich ist dem äußern, oder wenn die innern zusammen zwey rechte betragen, u. s. f., leitet der Verfasser aus dem Satze in §. 9. ab, welches nun auch sehr leicht geschehen kann.

Prüfung dieser Theorie.

Vergleicht man die Erklärung der Parallelen in dieser Theorie mit jener der ältern, so wird man sogleich die große Aenderung gewahr, welche der Verfasser mit derselben angenommen hat. Man sieht, daß er auch hier wieder ganz willkührlich von der allgemein angenommenen Euclidischen Definition nicht ohne großen Zwang, den die Ansicht der Sache dabey erlitt, abgewichen sey.

Legt man indessen auch diese seine Definition zum Grunde, so folgt doch hieraus keineswegs der als Zusatz vorgetragene, und aus der Definition abgeleitete Satz, daß die, die Endpuncte D, D, (Fig. 7.) dergleichen Perpendikel CD, CD u. s. f., verbindenden Linien DD, DD u. s. w. in einer einzigen geraden Linie liegen. Denn so gewiß es ist, daß man sich jeden von den gleichen Perpendikeln in eine Menge gleicher Theile getheilt denken kann, so läßt sich auf keine Art dadurch beweisen, daß, wenn die Puncte D, D, D in die Theilungspuncte d, d, d, deren jeder der mte des ganzen Perpendikels seyn soll, gekommen sind, die Linien DD, DD, DD, ihre respective Lage gegen DC, DC, DC willkührlich geändert haben. Wenn man sich also auch vorstellt, daß jede der geraden gleichen CD, CD, CD sich um die nämliche beständige Größe stets verkleinert, indem die gerade AB unbeweglich bleibt: so läßt sich daraus doch

doch nicht absehen, ob bey diesem successiven Uebergange in gleichweit von A B entfernte Theilungspuncte der CD, CD, CD die Winkel bey x und y ihre Lage behalten. Ist D D D einmal in die Lage d d d gekommen, so weiß man wohl, daß die Puncte d. d, d noch gleichweit von A B entfernt sind; aber man weiß noch eben so wenig, daß ddd eine einzige gerade Linie sey, als man es oben von D D D wußte. Kann man demnach die Unveränderlichkeit der Winkel x und y bey dem Fortrücken von D D D nicht beweisen, und sind x und y nicht den Winkeln bey C gleich, das heißt, sind sie in dieser Lage nicht selbst rechte Winkel: so ist nie mit geometrischer Strenge dargethan, daß die Puncte D, D, D auf C, C, C fallen müssen, oder daß D,D,D, eine einzige gerade Linie sey. Man vergleiche hiermit die der Hauff'schen Theorie der Parallelen beygesetzte Critik.

Der Satz in §. 3. hält nun noch weniger als der vorstehende die Kennerprobe aus. Denn um zu beweisen, daß eine Linie C D (Fig. 8.), welche auf A B senkrecht steht, auch lothrecht auf E F sey, hätte der Verfasser dieses Perpendikels nicht aus C errichten, sondern von irgend einem Puncte D der E F auf A B fallen sollen, wo dann bey C rechte Winkel entstanden wären, wie er es auch annimmt. Wenn er aber aus C eine Linie C D senkrecht errichtet, so entstehen wohl bey C rechte Winkel, aber wie will man denn beweisen, daß die hinlänglich verlängerte C D die E F irgendwo in

in D schneiden muß? Das eben Gesagte findet gleichfalls von der Errichtung der Perpendikel KL und GH, in gleicher Entfernung von C, aus K und G statt. Indessen läßt sich diese Schwierigkeit leicht dadurch heben, wenn man in EF von irgend einem Puncte D das Loth DC auf AB und in gleicher Entfernung von D aus L und H die Perpendikel LK und HG auf dieselbe Linie fallen läßt. Auf diese Art entstehen auch bey K, C und G rechte Winkel, und die Vorbereitung des Verfassers findet noch immer statt. Die Gleichheit der Winkel bey D wird nun dadurch gezeigt, daß er aus der Gleichheit der Dreyecke LCK und CGH die Gleichheit der Seiten LC und CH beweiset. Allein woher weiß man denn, daß die Dreyecke LCK und CGH gleich sind? Nach Bossut folgt dies daraus, weil CK = CG, LK = HG und ∢ K = R = ∢ G sey. Aber warum wird denn LK = HG gesetzt? Die Ursache davon soll hierin liegen, daß EF mit AB parallel ist. Nach dem Verfasser ist jene Linie die von einer andern allenthalben gleichweit entfernt ist, mit dieser gleichlaufend; aber folgt denn daraus auch so unbedingt das Umgekehrte des Satzes, daß, wenn zwey Linien parallel laufen, (und sie können es unter andern Bedingungen als unter gleicher Entfernung seyn) dieselben auch allenthalben gleichweit von einander entfernt sind? Dieser Satz folgt erst als Zusatz in §. 5., der also das Angenommene schon zum voraussetzt, anstatt daß dieses hätte bewiesen werden sollen. Da es demnach auf keine Weise

dar-

gethan ist, daß LK = HG: so ist der Satz, daß sich bey D rechte Winkel befinden, gänzlich unerwiesen, und die Stützen dieser Theorie fallen mit der ganzen Theorie zusammen. Die folgenden Sätze fließen als Folgerungen ganz richtig aus dem Vorhergehenden.

Unbegreiflich ist es übrigens, daß der Verfasser hier, so wie in der ältern Theorie, gar keine Erwähnuug von der Schwierigkeit des Satzes thut, den Euclid als Grundsatz annimmt, und auf welchen sich doch alle Schwierigkeiten in dieser so intricaten Theorie der Parallelen zurückbringen lassen.

Fünf-

Fünfter Abschnitt.

Die Theorie
des
A. G. Kästner *).

Dieser vortreffliche Gelehrte, dessen Namen von allen gründlichen Mathematikern Deutschlands mit Ehrfurcht genennt wird, gründet seine Theorie der Parallelen auf die Betrachtungen, welche in den Zusätzen zu dem 11ten Satze seiner Geometrie enthalten sind. Er nimmt die Euclidische Erklärung der Parallelen an, und beweiset in diesem 11ten Satze, daß zwey gerade, in einerley Ebene sich befindliche, Linien parallel seyn müssen, wenn

a) die Summe der beyden innern entgegengesetzten Winkel zweyen rechten; oder wenn

b) der

*) Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv, von Abraham Gotthelf Kästner. Fünfte vermehrte Auflage. Göttingen 1792. Seite 204 bis 207.

b) der äußere dem innern, oder wenn

c) der eine Wechselwinkel dem andern gleich ist.

Hierauf folgen die Zusätze, welche ich wörtlich hierher setze.

1. Zusatz.

Durch einen gegebenen Punct G (Tab. III. Fig. 1.) mit einer gegebenen Linie CD eine gleichlaufende zu ziehen, ziehe man GH nach Gefallen, und mache ∢ HGA = ∢ GHD.

2. Zusatz.

Es ist gewiß, daß man durch G Linien ziehen kann, welche mit CD zusammenstoßen, wenn man nur zu G einen Punct in CD nimmt. Man kann sich also vorstellen, daß AB um G, als einen Mittelpunct, kreisförmig nach GH zu gedreht, endlich in Lagen kömmt, in denen sie CD schneidet. Ich behaupte, der erste Durchschnitt mit CD werde sich nicht angeben lassen. Gesetzt, er sey K, daß HK eine bestimmte Linie ist, so nehme man HI > HK und ziehe GI; welches also eine Lage seyn wird, in der CD von der herumgedrehten AB geschnitten wird, ehe sie noch in die Lage GK kömmt; oder I wird ein Durchschnittspunct seyn, der vor K vorhergeht.

3. Zusatz.

Der erste Durchschnittspunct der herumgedrehten AB mit CD, liegt weiter von H, als jede Weite beträgt, die sich bestimmen läßt, d. h. als jede endliche Weite. Man kann also sagen, er liege unendlich weit von H. Mit dieser Entfernung des ersten Durchschnittspuncts, läßt sich also HG, als eine bestimmte und endliche Linie, nicht dergestalt vergleichen, daß man angeben könnte, wie vielmal HG müßte genommen werden, um die Weite von H, als an den ersten Durchschnittspunct, oder eine nächst größere Weite zu bekommen.

4. Zusatz.

AB und CD stoßen nicht zusammen; GH mag klein oder groß seyn, oder sie mögen nahe oder weit von einander entfernt seyn. Es kömmt hier nicht auf ihre Entfernung, sondern auf ihre Lage an, die durch den Winkel, den jede mit EF macht, bestimmt wird, und also bey beyden einerley ist.

5. Zusatz.

Wenn aber GP (Fig. 2.) ohne Ende verlängert, nicht mit CD zusammenstößt, so muß solches von beyder Linien Abstande HG, nicht von ihrer Lage gegen einander herrühren. Man schiebe AB mit dem unveränderlich daran bleibenden

∢ BGP längst EH so hinunter, daß sich ∢ EGB nicht ändert, daß AB nach und nach in solche Lagen kömmt, wie ab eine vorstellt, so muß GP, so kurz man sie auch annähme, gewiß in Lagen wie gp kommen, in denen sie CD schneidet. Denn die Linie AB kann ganz herunter rücken, bis sie auf CD und G in H fällt; da denn GP nothwendig unter HD, in Hh fallen, und also zuvor ganz durch HD durchgeschoben seyn muß. Wie nun auf diese Art erhellet, daß Linien, die gegen EF eben die Lage haben, die GH hat, CD gewiß schneiden, so erhellet auch, daß man nicht annehmen kann, GP komme durch das erwähnte Herunterziehen mit AB, in eine Lage, in der sie CD schneidet, ohne zugleich anzunehmen, sie habe CD schon zuvor geschnitten, ehe sie in diese Lage gekommen ist. Denn sobald GP in einer solchen Lage, z. E. in gp ist, so geht sie, nach q verlängert, unter CD durch, und die Puncte zwischen q und p müssen also vor p durch CD gegangen seyn. Also läßt sich hier kein erster Punct des Durchschiebens angeben, wie bey dem 2. Zusatze kein erster Punct des Durchschnitts, doch mit dem Unterschiede, daß hier nicht wie dort der Schluß gilt, dieser erste Punct lasse sich deswegen nicht angeben, weil er weiter als alle Puncte, die sich angeben lassen, von H entfernt liege. Denn man begreift, daß dieser Schluß wegfiele, wenn man nur annähme, GP in der ersten Lage schnitte schon CD in einer bestimmten Entfernung von H, da denn dieser Durchschnitt der erwähnte erste seyn würde,

der-

dergleichen sich aber im 2. Zusatze nicht angeben läßt.

6. Zusatz.

Es giebt also ohne Zweifel Dreyecke, deren beyde Winkel an der längst HG fallenden Grundlinie, GHD = HGP sind. Eines von ihnen ist Hgp. Stoßen nun GP und CD ohne Ende verlängert nie zusammen, so giebt es kein solches Dreyeck, das HG oder eine größere Länge zur Grundlinie hat. Man sieht aber nicht, wie blos die längere Grundlinie die Dreyecke unmöglich machen soll. Man wird vielmehr nach dem, was man bey den möglichen Dreyecken dieser Art wahrgenommen hat, urtheilen, daß bey einer längern Grundlinie nur die Seiten bis zum Zusammenstoßen weiter müssen fortgezogen werden. Diese Betrachtungen werden uns berechtigen, Folgendes anzunehmen:

Grundsatz.

Wenn zwo gerade Linien GP, CD von einer dritten EF so geschnitten werden, daß die innern entgegengesetzten Winkel HGP + GHD < 2R, so stoßen sie verlängert nach der Seite von EF, wo diese Winkel liegen, zusammen.

Was nämlich von diesem Winkel angenommen wird, ist so viel als nähme man an ∢ EGP

>

$> \measuredangle$ GHD, oder daß GP zwischen die gleichlaufenden AB, CD hineinfällt.

Prüfung dieser Theorie.

Der berühmte Verfasser dieser Theorie gesteht selbst in der Vorrede zu seinen mathematischen Anfangsgründen, „er habe kein Verfahren finden können, welches seiner Befriedigung näher „gekommen sey, als das in den vorhergehenden „Sätzen gewählte." Durch diese Bemerkung legte er also schon gewissermaaßen das bescheidene Geständniß ab, daß er seiner Darstellung nicht den höchsten Grad der geometrischen Evidenz beylege, sondern nur einen neuen Weg eingeschlagen habe, welcher ihn, nach seiner Ueberzeugung, mehr befriedigte, als irgend ein anderes System seiner Vorgänger. Daß nun auch diese Kästnerische Theorie den Namen einer völligen Berichtigung der Lehre von den Parallelen nicht verdiene, wird um so deutlicher in die Augen springen, wenn man dessen Darstellung, zur bequemern Uebersicht ins Kurze zieht.

I. Die Hauptstärke seines Beweises beruht darauf, daß die Linie GP (Fig. 2.), welche mit der GF einen $\measuredangle$ PGP $<$ $\measuredangle$ BGF bildet, und folglich $\measuredangle$ PGH $+$ $\measuredangle$ GHD $<$ 2R macht, wenn sie in dieser Lage die HD nicht durchschneiden solle, durch das Fortrücken auf GH unter

der

der nämlichen Neigung einmal in die Lage von gq kommen müsse, wo sie diese HD in p schneidet. Nun kann aber kein Durchschnittspunct, wie p, als der erste angenommen werden, da man sich von p gegen D und von g gegen G immer noch Puncte denken kann, wo dieser Durchschnitt der Linie gq früher erfolgt seyn müsse, als in dem Puncte p. Es müsse also wirklich noch einen frühern Durchschnitt als der letztvorhergehende geben; folglich auch einen für die Linie GP, ehe sie sich, unter dem bleibenden ∢ PGH, von G gegen H bewegte.

II. Sollten ferner die Linien GP und HD unter diesen Umständen nicht einmal zusammentreffen, so ließe sich doch immer eine Linie gp dergestalt ziehen, daß ∢ Hgp = ∢ HGP sey. Hier wäre aber doch gar nicht einzusehen, warum ein Dreyeck, welches GH zur Grundlinie, PGH und GHD zu den beyden Winkeln hätte, unmöglich seyn sollte, da doch ein △ gHp möglich ist, welches bey g und H die nämlichen Winkel und nur eine kleinere Grundlinie gH hätte.

Gegen I. läßt sich Folgendes einwenden. Wenn man auch gleich zugesteht, daß man auf der CD keinen Durchschnittspunct wie p, als den ersten annehmen könne, so folgt hieraus immer noch nicht mit völliger Gewißheit, daß es also einen frühern geben müsse. Nur so viel kann mit Gewißheit daraus abgeleitet werden, daß es entweder einen frühern gebe, oder daß gar

kei-

keiner statt finden könne. So lange es also noch nicht als völlig widersprechend bewiesen ist, daß kein Durchschnitt erfolgen könne, so lange läßt sich immer noch nicht mit Ueberzeugung schließen, daß es nothwendigerweise einen solchen Punct geben müsse. Daraus also, daß die GP, bey ihrer Bewegung von G nach g die HD in p schneidet, und daß man diesen Punct p nicht als den ersten dieser Durchschnittspuncte ansehen darf, folgt noch nicht unwidersprechlich, daß dieses Durchschneiden der Linien auch in der Lage GP und in andern, wo diese GP von G gegen E fortrückt, ganz bestimmt erfolgen müsse. Man sieht in der Annahme, daß die gq die HD in p schneidet, und die GP diese HD niemals durchschneiden kann, keinen bewiesenen Widerspruch, ehe man gezeigt hat, daß es mit jeder Linie nur eine einzige ihr gleichlaufende geben könne. Dieses zu beweisen, ist aber gerade der Zweck einer Berichtigung der Parallel-Theorie. Da es also bey dieser Darstellung nicht bestimmt ist, wie weit die GP verlängert werden müsse, bis sie die HD durchschneidet, so bleibt es immer hierbey unbestimmt, ob sie dieselbe je erreichen werde, und der Hauptsatz ist hier immer nur analogisch und nicht geometrisch bewiesen.

Gegen II. kann man diese Bemerkung machen. Aus der Möglichkeit des $\triangle Hgp$, welches die Grundlinie Hg, die $\angle Hgp$ und gHp enthält, läßt sich nicht mit Evidenz auf die Möglichkeit eines Dreyecks über der Grundlinie Hg schlie-

schließen, welches die gleichen ∢GHp und HGP enthalten soll. Wollte man diesen Schluß streng rechtfertigen, so müßte man über die Natur der Dreyecke, d. h. von der Summe ihrer Winkel, oder ihrer Aehnlichkeit das Nöthige bewiesen haben, welches doch Alles erst eine Folge der schon berichtigten Parallel-Theorie ist. Was hier aus der Möglichkeit dieser Dreyecke geschlossen wird, bezieht sich eigentlich ganz und gar nicht auf bewiesene Eigenschaften oder Vordersätze dieser Figuren, sondern heißt nur so viel, als: weil die gq in der Lage Hgq die HD in p schneidet, so wird auch die GP unter dem gleichen ∢HGP diese HD irgendwo durchschneiden müssen. Der Satz, wie er hier steht, ist also ohne strengen Beweis und, wie ohnedies klar ist, als Axiom nicht evident genug. Mit gleichem Rechte könnte man hier folgenden Schluß machen. Euclid beweiset (El. I. 17.) den Lehrsatz:

„Wo man sich ein Dreyeck denkt, da muß
„die Summe zweyer innern Winkel weniger
„als zwey Rechte betragen,"

mit aller Schärfe. Kehrt man diesen Satz um, so heißt er:

„Wo die zwey innern Winkel weniger als
„zwey Rechte betragen, da muß man sich
„auch ein Dreyeck denken,

und ist der Ausdruck des berüchtigten XI Axioms. Da nun der erste Satz streng bewiesen ist, so

muß

muß auch dessen Umkehrung dargethan seyn. Dieses Argument scheint nicht weniger bindend, als die Kästner'sche Darstellung, wenn man sie in ihrer eigentlichen Stärke betrachtet.

Wirft man also einen unpartheyischen Blick auf die bisherigen Bemerkungen, so muß man hier freymüthig bekennen, daß es auch dem großen Kästner nicht gelungen sey, das Mangelhafte zu ergänzen, was in der Parallel-Theorie herrscht. Gestehen muß man aber zugleich, daß seine Darstellung zu jenen gehöre, welche sich in Ansehung des Bestrebens, hier den höchsten Grad von Evidenz zu erreichen, vor andern Systemen sehr vortheilhaft auszeichnen.

Sechster Abschnitt.

Die Theorie
von
Robert Simson *).

Dieser englische Geometer, der sich unter andern auch durch eine Uebersetzung der Euclidischen Elemente bekannt machte, wozu er sehr belehrende critische Anmerkungen und Zusätze schrieb, bemühte sich auch, die Wahrheit des eilften Grundsatzes im Euclid auf eine befriedigende Weise darzuthun und trug hierüber eine eigne Theorie vor, welche ich aus der neuen deutschen Herausgabe dieses schätzbaren Werks den Lesern zuerst mittheilen und nachher critisch beleuchten werde.

Der

*) Man sehe: Critische Anmerkungen und Zusätze über die Euclidischen Elemente von Robert Simson; als zweyter Theil der Elemente Euclids. Nach der deutschen Uebersetzung von Mathias Reder, herausgegeben von Joseph Niesert. Paderborn 1806. 8. Seite 650. u. f.

Der Verfasser beginnt seine Theorie folgendergestalt.

Der Satz, welcher gewöhnlich die fünfte Foderung oder der eilfte Grundsatz, bey Einigen der zwölfte genennt wird, hat sowohl den alten als den neuern Geometern viel zu schaffen gemacht. Er scheint unter den Grundsätzen seinen eigentlichen Platz nicht zu haben, wie er auch in der That nicht von selbst offenbar ist, sondern bewiesen werden muß, welches auf folgende Art geschehen kann.

1. Erklärung.

Die Entfernung eines Puncts von einer geraden Linie ist die senkrechte Linie, welche aus dem Puncte auf dieselbe gezogen wird.

2. Erklärung.

Man sagt, eine gerade Linie nähere sich einer andern geraden Linie, wenn die Entfernungen der Puncte der ersten von der andern geraden Linie kleiner oder größer werden, als sie waren. Und man sagt: zwey gerade Linien halten die nämliche Entfernung von einander, wenn die Entfernung der Puncte der einen derselben von der andern immer die nämliche ist.

Grundsatz.

Eine gerade Linie kann nicht anfangs sich einer andern geraden Linie nähern, und dann sich

von derselben entfernen, ehe sie dieselbe durchschneidet; und auf die nämliche Art kann sich eine gerade Linie nicht von einer andern entfernen, und dann sich derselben nähern; so kann auch keine gerade Linie von einer andern geraden Linie immer die nämliche Entfernung halten, und dann sich derselben nähern, oder sich von derselben entfernen. Denn eine jede gerade Linie hält immer die nämliche Richtung, z. B. (Tab. III. Fig. 3.) die gerade Linie ABC kann nicht erstens vom Puncte A zu B sich der geraden Linie DE nähern, und dann vom Puncte B zum Puncte C sich von der nämlichen DE entfernen. Auf die nämliche Art kann die gerade Linie FGH sich nicht anfangs von F zu G von DE entfernen, und dann von G zu H sich der nämlichen DE nähern; und eben so im letzten Falle, wie (Fig. 4.) zu sehen ist.

Erster Satz.

Wenn zwey gleiche gerade Linien AC, BD, (Fig. 5.) jede unter rechten Winkeln auf der nämlichen geraden Linie AB stehen, und die Puncte C, D durch die gerade Linie CD mit einander verbunden werden, so wird die gerade Linie EF, welche von einem beliebigen Puncte E in AB unter rechten Winkeln auf AB nach CD gezogen wird, der AC oder BD gleich seyn.

Wäre EF nicht gleich AC, so müßte eine derselben größer seyn, als die andere; dieses sey AC;

AC; alsdann ist, weil FE kleiner als CA, die gerade Linie CFD am Puncte F der geraden Linie AB näher, als am Puncte C; d. h. CF nähert sich vom Puncte C nach F der geraden Linie AB; weil aber DB größer als FE, so ist die gerade Linie CFD in dem Puncte D weiter von AB entfernt, als im Puncte F; d. h. FD entfernt sich von F nach D von AB. Folglich nähert sich die gerade Linie CFD zuerst der geraden Linie AB, und dann entfernt sie sich von derselben, ehe sie dieselbe durchschneidet, welches unmöglich ist. Daher ist FE nicht ungleich der AC, d. h. sie ist derselben gleich.

Zweyter Satz.

Wenn zwey gleiche gerade Linien AC, BD, (Fig. 6.) jede unter rechten Winkeln auf der nämlichen geraden AD stehen, so macht auch die gerade Linie CD, welche ihre Endpuncte mit einander verbindet, mit AC und BD rechte Winkel.

Man ziehe AD, BC. Weil in den Dreyecken CAB, DBA die Seite CA = DB, AB = AB und ∢ CAB = ∢ ABD, so ist AD = BC. Und in den Dreyecken ACD, BDC ist AC = BD, CD = CD und AD = BC; also auch ∢ ACD = ∢ BDC. Nun ziehe man aus einem beliebigen Puncte E in AB die gerade EF unter rechten Winkeln auf AB nach CD, so ist, nach dem vorigen Satze, EF

EF = AC = BD; daher, wie so eben bewiesen, ∢ ACF = ∢ EFC. Aus der nämlichen Ursache ist ∢ BDF = ∢ EFD. Da nun auch ∢ ACD = ∢ BDC, so ist auch ∢ EFC = ∢ EFD = R; folglich auch ∢ ACD = ∢ BDC = R.

Folge.

Wenn zwey gerade Linien AB, CD unter rechten Winkeln auf der nämlichen geraden Linie AC stehen, und zwischen denselben eine gerade Linie BD unter rechten Winkeln zu einer derselben, wie z. B. zu AB, gezogen wird, so ist BD = AC, und ∢ BDC = R.

Wäre AC nicht = BD, so nehme man BG = AC und ziehe CG, so ist, nach diesem Satze, ∢ ACG = R. Nun ist aber auch ∢ ACD = R; daher ∢ ACD = ∢ ACG, welches unmöglich ist. Folglich ist BD = AC, und nach diesem Satze ∢ BDC = R.

Dritter Satz.

Wenn zwey gerade Linien, die einen Winkel einschließen, verlängert werden, so kann in einer derselben ein Punct gefunden werden, wovon die gerade Linie, welche davon senkrecht zur andern gezogen wird, größer seyn muß, als jede gegebene gerade Linie.

Es

Es seyen AB und AC, (Fig. 7.) zwey gerade Linien, welche mit einander einen Winkel einschließen, und AD sey die gegebene gerade Linie. Es kann entweder in AB oder AC, z. B. in AC ein Punct gefunden werden, aus welchem die nach der andern AB senkrecht gezogene gerade Linie größer seyn wird, als AD.

In AC nehme man einen beliebigen Punct E, und ziehe EF senkrecht auf AB, verlängere AE nach G, so daß EG = AE; desgleichen verlängere man FE nach H, mache EH = EF, und ziehe nun GH.

Weil in den Dreyecken AEF und GEH die Seite AE = EG, EF = EH, und beyde gleiche Winkel einschließen, so ist ∢ GHE = AFE = R. Nun ziehe man GK senkrecht auf AB, so ist, weil die geraden Linien FK und GH unter rechten Winkeln auf FH stehen, und GK senkrecht ist auf FK, die GK = FH (II. Satz. Folge.), d. h. = 2 EF.

Auf die nämliche Art ist, wenn man AG so nach L verlängert, daß GL = AG, und LM senkrecht auf AB gezogen wird, LM = 2 GK, u. s. w. In AD nehme man AN = EF, und AO = GK = 2 EF = 2 AN; auch AP = LM = 2 GK = 2 AO, und dieses geschehe so lange, bis die genommene gerade Linie größer sey als AD. Diese sey z. B. AP; und weil AP = LM, so ist auch LM > AD.

Wier-

Vierter Satz.

Wenn zwey gerade Linien AB und CD (Fig. 8) mit einer andern geraden Linie EAC nach der nämlichen Seite derselben gleiche Winkel EAB und ECD machen, so stehen AB und CD auf irgend einer geraden Linie senkrecht.

Man theile AC in F in zwey gleiche Theile und ziehe FG senkrecht auf AB, mache EH an der entgegengesetzten Seite von AC (in Betracht auf jene, wo AG ist) = AG und ziehe FH.

In den Dreyecken AFG und CFH ist FA = FC; AG = CH, und ∢ FAG, d. h. ∢ EAB, = ∢ FCH; daher ist ∢ AGF = ∢ CHF, und ∢ AFG = ∢ CFH. Setzt man zu diesen letztern den gemeinschaftlichen Winkel AFH, so sind die beyden ∢ AFG und AFH zusammengenommen den beyden Winkeln CFH und AFH gleich, welche letztere zusammengenommen = 2 R. Folglich liegen GF und FH in einer geraden Linie. Da AGF = R, so ist auch ∢ CHF, welcher denselben gleich ist, = R. Folglich stehen AB und CD senkrecht auf GH.

Fünfter Satz.

Wenn zwey gerade Linien AB und CD, (Fig. 9.), von einer dritten ACE

so

so durchschnitten werden, daß die innern Winkel auf der nämlichen Seite derselben BAC und ACD zusammengenommen kleiner als zwey rechte sind, so werden AB und CD, wenn sie verlängert werden, auf der Seite, wo diese beyden Winkel sind, zusammenlaufen.

Am Puncte F der geraden Linie CE mache man ∢ ECF = ∢ EAB und ziehe nach AB die gerade Linie CG senkrecht auf CF.

Weil ∢ ECF = ∢ EAB, ∢ ECF + ∢ FCA = 2 R, so ist auch ∢ EAB + ∢ FCA = 2 R. Nun ist aber ∢ EAB + ∢ ACD < 2 R angenommen, daher ist ∢ FCA > ∢ ACD, und CD fällt zwischen CF und CA; und weil CF und CD einen Winkel einschließen, so kann (III. Satz.) in einer derselben CD ein Punct gefunden werden, aus welchem die nach CF senkrecht gezogene gerade Linie größer ist, als die gerade Linie CG. Dieser Punct sey H, so ziehe man HK senkrecht auf CF, welche AB in L berührt. Weil AB und CF mit AC auf der nämlichen Seite gleiche Winkel bilden, so stehen AB und CF (IV. Satz.) senkrecht auf der geraden Linie MNO, welche AC in N in zwey gleiche Theile theilt und senkrecht auf CF steht. Folglich ist (II. Satz, Folge.) CG = KL, welche senkrecht auf CF stehen, und HK > CG, und daher auch > KL, und folg-

folglich der Punct H in dem verlängerten Stücke von KL. Folglich muß die gerade Linie CDH, welche zwischen den beyden, an entgegengesetzten Seiten von AL liegenden, Puncten C und H liegt, nothwendig die gerade Linie AB durchschneiden.

Prüfung dieser Theorie.

Gegen die erste Erklärung dieser Theorie läßt sich bekanntlich nichts einwenden. Auch ist der erste Theil der zweyten keinem Zweifel unterworfen, da man wirklich beweisen kann, daß es gerade Linien gebe, welche sich einer andern nähern, indem alle folgende Puncte der ersten näher bey der zweyten liegen. Man nehme nur (Fig 5.) $\measuredangle$ CAB = R und lege in C die CF unter dem $\measuredangle$ ACF < R, so kann evident dargethan werden, daß sich diese CF der AB gegen die Seite F hin nähere; obschon doch nicht bewiesen ist, daß jeder Punct der CF, so weit man ihn von C entfernt annehmen mag, immer näher bey AB liegen müsse, als CA beträgt. Wenn aber der Verfasser in dem zweyten Absatze dieser Erklärung sagt: zwey Linien halten immer die nämliche Entfernung von einander, wenn die Entfernung der Puncte der einen derselben von der andern immer die nämliche ist, so läßt sich dieses, als eine bloße Worterklärung wohl annehmen. Allein wenn gefragt wird, ob es denn auch wohl solche gerade

Linien geben könne, welche in allen ihren Puncten gleichen Abstand von einander haben, so geräth man in große Verlegenheit, weil die Möglichkeit dieser Linien ohne die berichtigte Theorie der Parallelen bis jetzt noch nicht befriedigend dargethan ist. Die Wege, welche man hier einschlug, sind von doppelter Art. Entweder läßt man eine gerade Linie von willkührlicher Größe unter unveränderlichem Winkel sich mit ihrem einen Puncte über eine gezogene gerade Linie fortbewegen, daß der andere Punct auf diese Art auch eine Linie bezeichnet, welche nothwendig von der untern überall gleichweit abstehen muß; oder man errichtet in den Endpuncten einer nach Belieben gezogenen geraden Linie ganz gleiche Perpendikel und verbindet ihre äußersten Puncte durch eine gerade Linie. In beyden Fällen bleibt aber immer etwas unbewiesen, was doch streng dargethan werden muß. Bey der ersten Darstellung hat man bis jetzt noch nicht evident gezeigt, daß die Linie, welche aus der Bewegung des Perpendikels entsteht, wirklich eine gerade sey; und in der zweyten Methode ist es unentschieden, ob auch alle Zwischenpuncte der gezogenen geraden Linie von der zuerst angenommenen immer in der Entfernung der beyden gleichen Perpendikel abstehen werden oder nicht. So lange diese zwey Folgerungen nicht mit Evidenz bewiesen sind, so lange herrscht immer noch eine Lücke in dieser Darstellung der Parallel-Theorie. Der Verfasser des gegenwärtigen Systems fühlte wohl selbst hier die Nothwendigkeit eines bindenden Beweises und versuchte daher in

seinem

seinem ersten Satze eine geometrische Ableitung desselben, welche sich vorzüglich auf den vorausgeschickten Grundsatz stützt, dessen Werth oder Unwerth nun geprüft werden soll.

Der Verfasser sagt hier im Anfange: Eine gerade Linie kann nicht anfangs sich einer andern geraden Linie nähern, und dann sich von derselben entfernen, ehe sie dieselbe durchschneidet. Zergliedert man diesen Satz genauer, so enthält er eigentlich folgende zwey Behauptungen:

I.) Eine gerade Linie, von welcher man weiß, daß ein Endpunct näher bey einer gegebenen geraden Linie liegt, als der andere, wird sich, wenn man sie nach der Seite des näher liegenden Punctes verlängert, der geraden noch immer mehr und mehr nähern. Wenn also (Fig. 3.) der Punct B näher bey DE liegt, als der Punct A, so wird diese Linie AB, gegen B verlängert, der DE immer näher rücken, und kann sich also nie mehr weiter von ihr entfernen.

II.) Wenn sich eine gerade Linie einer gegebenen geraden annähert, so muß diese Näherung so zunehmen, daß sie die letztere Linie wirklich einmal durchschneidet. Liegt also B näher bey DE als A, so wird die verlängerte AB die Linie DE einmal wirklich durchschneiden müssen.

Sollte nun die erste Behauptung als Grundsatz gelten, so müßte sie an und für sich so evident seyn,

seyn, daß man nicht den geringsten Zweifel gegen ihre Wahrheit vorbringen könnte. Ist dies aber auch wirklich der Fall? — Ich glaube nicht, denn es ist wohl aus der Natur einer geraden Linie noch nicht vollkommen einleuchtend, daß sie sich in ihrer Verlängerung einer andern geraden Linie immer mehr nähern müsse, wenn sie sich dieser zum Theil schon genähert hat. Das Nähern einer Linie gegen die andere kann doch nur aus der Abnahme der gezogenen Perpendikel hergeleitet werden. Der bloße Augenschein kann hier eben so wenig, als in andern geometrischen Beweisen ein statthafter Bürge der Wahrheit seyn. Und doch ist es nichts, als dieser Augenschein, der zu dem Schlusse verleitet, die gegen B verlängerte AB möge der DE immer näher und näher rücken, je weiter man sie verlängert. So lange es also dem Geometer nicht vergönnt ist, aus dem sinnlichen Scheine eine geometrische Wahrheit abzuleiten, so lange darf man diesen Grundsatz nicht als eine solide Basis ansehen, worauf die Theorie der Parallelen mit Evidenz gegründet werden kann. Mit gleichem Rechte könnte man z. B. den Lehrsatz: In jedem Dreyecke steht dem größern Winkel die größere Seite, und umgekehrt der größern Seite der größere Winkel gegenüber, in die Reihe der geometrischen Axiome setzen, weil auch hier schon der Augenschein die Wahrheit der Behauptung zeigt. Und doch wird sich kein Geometer aus der strengen Schule des Euclides diese Freyheit erlauben.

Will man hingegen den obigen ersten Satz geometrisch erweisen, so stößt man sogleich auf unübersteigliche Hinderniße. Es ist wohl kein anderes Mittel übrig, als die Abnahme der Perpendikel darzuthun. Hierbey ist es aber äußerst schwer, den Satz in seiner ganzen Allgemeinheit zu beweisen. Nimmt man auch (Fig. 5.) ∡ CAB = R, und ∡ ACF < R, so läßt es sich allerdings mit Evidenz darthun, daß es von C gegen F Puncte in der CF gebe, welche näher bey AB liegen, wie sie sich weiter von dem Puncte C entfernen; allein es ist bis jetzt noch keinem Geometer gelungen, zu zeigen, daß ein in CF nach Belieben angenommener Punct von der AB weniger entfernt sey, als es der Punct C ist. Könnte dieses evident bewiesen werden, so wäre die schwierige Lehre von den Parallelen vollkommen berichtigt. Auf diesem Wege läßt sich also wohl der Knoten nicht so leicht lösen, als es zu wünschen wäre.

Noch weniger als die erste läßt sich die obige zweyte Behauptung als Grundsatz annehmen. Der Augenschein kann hier noch weniger entscheiden, als in dem vorigen Falle. Denn wenn der Winkel ACF nur äußerst wenig von einem rechten Winkel verschieden ist, so wird der Schenkel CF auch nur um etwas sehr weniges der AB näher rücken, und man wird durch das bloße Auge, nicht einmal bey einer sehr großen Verlängerung der Linie CF, bemerken, daß sich dieselbe der AB beträchtlich genähert habe. Hier wird zugleich der

Un-

Unterschied zwischen streng geometrischen Beweisen und den bloßen Wahrnehmungen vermittelst der Sinne recht offenbar. Die geometrische Ueberzeugung muß hier weiter gehen, als die sinnliche, und man muß beweisen können, daß die CF und AB, in ihrer Verlängerung, nothwendiger Weise zusammentreffen werden, wenn man gleich den Unterschied des Winkels ACF von einem rechten Winkel so klein annimmt, als man nur immer will.

Wollte man aber auch als bewiesen annehmen, die verlängerte CF rückte der AB immer näher und näher, je mehr man sie verlängert, so läßt sich sogar aus diesem Näherrücken noch nicht mit Evidenz auf einen Durchschnitt der beyden Linien schließen. Es giebt ja allerdings Fälle, wo sich eine Linie einer andern ins Unendliche nähern kann, ohne je mit ihr zusammenzutreffen, und es bleibt vollkommen unentschieden, ob dies nicht etwa auch hier statt finden könne.

Endlich ist noch hier zu bemerken, daß die Lehre von den Parallelen vollkommen berichtiget wäre, wenn man den Durchschnitt zweyer Linien streng beweisen könnte, wovon die eine mit einer dritten sie schneidenden einen rechten und die andere einen spitzen Winkel bildet. Diesen einzigen Vordersatz angenommen, wäre die ganze folgende Theorie des Verfassers entbehrlich, um das System der Parallelen mit der höchsten Strenge vorzutragen.

Was

Was nun die folgende Behauptung des obigen Grundsatzes betrift, so ist wohl ersichtlich, daß die bisherigen Betrachtungen vollkommen auf ihn anwendbar seyen, und daß er folglich den Namen eines geometrischen Axioms nicht verdiene.

Da sich nun die ganze folgende Theorie des Robert Simson lediglich auf den Beweis des ersten Satzes bezieht; dieser Satz aber nur dann streng bewiesen ist, wenn das vorher angeführte Axiom als solches besteht, so fällt damit das ganze System dieses Englischen Geometers, welches in seiner fernern Ausführung sehr scharfsinnig ausgedacht ist, zusammen, und es erhellet, daß auch dieser Versuch der großen Menge mislungener Bemühungen diesen Gegenstand zu berichtigen beygezählt werden müsse.

Siebenter Abschnitt.

Die Theorie

von

S. F. Lacroix. *)

Dieser einsichtsvolle französische Geometer nimmt in seiner Darstellung der Parallel-Theorie folgenden Gang.

§. 1.

Zwey gerade Linien, welche, ob sie gleich in einerley Ebene liegen, sich nie schneiden, heissen parallel.

Zwey gerade Linien DE, FG, (Tab. II. Fig. 1.) welche auf der nämlichen geraden AB senkrecht stehen, sind demnach parallel.

*) Man sehe: Eiémens de Géométrie à l'usage de l'école centrale des quatrenations par *S. F. Lacroix*: troisiéme édition. à Paris. (an. XI.) 1803.

§. 2.

Alle jene, welche den Begriff von der geraden Linie haben, werden folgende Sätze ohne Schwierigkeit zugeben;

I. Wenn man durch den Punct D (Fig. 1.) der Linie AB die Gerade HH′ zieht, so daß dieselbe mit AB den Winkel HDB < R macht, oder gegen den Theil FG der Linie GG′ geneigt ist: so wird HH′ die GG′ oberhalb AB schneiden, wenn beyde Linien hinlänglich verlängert werden.

II. Wenn man durch den nämlichen Punct D die Linie II′ zieht, so daß der Winkel IDB > R daher ∢ I′DB < R ist: so neigt sich II′ gegen GG′, und wird, hinlänglich verlängert, dieselbe unterhalb AB schneiden.

Hieraus folgt, daß eine garade Linie, welche auf einer andern senkrecht ist, von allen jenen geschnitten wird, die gegen diese andere schief liegen, und daß also jene Linien, die in der nämlichen Ebene auf einer dritten senkrecht stehen, sich nie durchschneiden, und also parallel sind.

Anmerkung. In der Schwierigkeit, diesen Satz unmittelbar zu beweisen, liegt eben die Unvollkommenheit der Theorie der Parallelen. Viele Geometer haben, um zu diesem Zwecke zu gelangen sich unnütze Mühe gegeben, und viele,

wie

wie z. B. Bezout, haben den Fehler in den Schlüssen zu verstecken gesucht, welches doch gegen die strenge Pflicht gefehlt zu seyn scheint, die sich jeder Autor, der ein Elementarbuch verfaßt, auflegt: nämlich nur richtige Begriffe anzugeben, und besonders mit Sorgfalt derselben Ursprung zu zeigen. Es ist demnach besser, den Satz des vorigen Paragraphs als ein Axiom anzunehmen, auf welchem die ganze Theorie der Parallelen beruht, und der für alle, die gesunde Vernunft haben, evident genug ist, um in den Rang der ersten Begriffe, die unmittelbar von der Sensation (Sensation) entstehen, gesetzt zu werden.

Indessen wird folgender Beweis, der hauptsächlich von Bertrand genommen ist, denjenigen Vergnügen gewähren, die ein für allemal demonstrirt haben wollen. Er ist der einfachste und sinnreichste von allen, die ich kenne.

Vordersamst ist es evident, daß, wenn irgend ein Winkel edh (Fig. 2.) hinlänglich oft zu sich selbst addirt wird, wie es die zweyte Figur für hdh′, h′dh″, h″dh‴, h‴dh⁗ zeigt, man allezeit auf einen Winkel edh⁗ kommen werde, der größer als der rechte Winkel edb ist. Errichtet man aber auf der geraden DB die Perpendikel DE, FG, die willkührlich können verlängert werden, so wird man einen unbegrenzten Streifen EDFG bilden, welcher, so oft man ihn auch zu sich selbst addirt, den rechten Winkel

EDB nicht ausfüllen kann. Denn man nehme FK = DF, und errichte auf AB in K das Perpendikel KL. Dreht man nun den Streifen EDFG um die unbewegliche FG, als Axe herum, bis er wieder in die Ebene der Linie AB fällt, so wird dieser Streifen EDFG den Streifen GFKL genau decken, weil, wegen der rechten Winkel GFD, GFK, der Theil DF der Linie AB, auf den Theil FK, und wegen FK = DF, der Punct D auf den Punct K fallen wird, und da ferner der Winkel FKL = R = EDF, so fällt auch DE auf KL.

Dies vorausgesetzt, kann man nun auf der unbegrenzten geraden Linie DB so viele gleiche Theile nehmen als man will, welche alle der DF gleich sind, ohne je an ihre Grenze zu gelangen, und so viele gleiche Streifen EDFG bilden, als man will, ohne jemals den unbegrenzten Raum, der zwischen den beyden Schenkeln des rechten Winkels EDB enthalten ist, auszufüllen. Hieraus folgt, daß, in Rücksicht der Grenzen nach den Seiten (relativement à leurs limites latérales) die Fläche des Winkels edh größer sey, als die des Streifens EDFG. Wenn man daher in diesem Streifen auf der geraden ED einen Winkel EDH = edh macht, so kann derselbe zwischen den Linien ED und FG nicht enthalten bleiben; sein Schenkel DH wird demnach nothwendig die Linie FG durchschneiden müssen.

§. 3.

§. 3. Zusatz.

Nach dem Vorhergehenden ist es wohl evident, daß zwey gerade Linien, welche auf zwey andern geraden, die einen Winkel bilden, senkrecht stehen, sich nothwendig schneiden müssen. Wenn die Linie FG (Fig. 3.) z. B. auf BC senkrecht steht, so ist sie auf AB schief, weil, wenn das Gegentheil statt fände, BC und AB zu gleicher Zeit zwey Perpendikel auf FG seyn würden, die durch den nämlichen Punct B giengen, welches nicht seyn kann. Ist also FG auf AB schief, so muß sie die auf AB senkrechte Linie DE schneiden.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien DE, FG (Fig. 4.) auf der nämlichen geraden AB senkrecht stehen, so sind alle gerade, wie LM, die auf einer dieser zwey Linien senkrecht stehen, auch auf der andern senkrecht.

Beweis.

Gesetzt der Satz habe nicht statt, und die LM, welche in M auf FG senkrecht steht, sey in L nicht senkrecht auf DE: so könnte man in L auf LM ein Perpendikel errichten, welches, von EL verschieden, entweder rechts oder links von EL läge. Es müßte also, nach dem Bewei-

weise in der Anmerkung des §. 2., die EL die GM durchschneiden, welches nicht statt finden kann, weil EL und GM senkrecht auf AB, und daher parallel sind. Man kann demnach im Puncte L auf LM kein Perpendikel errichten, welches von EL verschieden wäre, und folglich ist LM auf DE und FG zugleich senkrecht.

§. 5. Zusatz.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt, daß wenn zwey gerade Linien mit einer dritten parallel laufen, dieselbe auch unter sich parallel sind. Denn jede Linie, die auf dieser dritten senkrecht ist, steht auch auf den beyden ersten Linien senkrecht, welche demnach, da sie auf ein und der nämlichen geraden lothrecht sind, unter sich parallel seyn müssen.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn zwey Parallelen DE, FG, (Fig. 5.) von irgend einer dritten geraden IH geschnitten werden, so sind die Winkel ELI und GMI gleich, welche auf einerley Seite der dritten, theils innerhalb, theils außerhalb der Parallelen liegen.

Beweis.

Wenn man vom Puncte K in der Mitte von LM, auf eine der geraden ED, FG die

DF

DF senkrecht fallen läßt, so muß diese Linie auch auf der andern senkrecht stehen. (§. 4.). Die Dreyecke DLK, KEM werden auch gleich seyn; denn es ist nach der Construction LK = KM, ∢ KDL = R = ∢ KFM; ferner ∢ DKL = ∢ MKF: folglich auch ∢ DLK oder ∢ ELI = ∢ KMF; aber es ist ∢ KMF = GMI; daher ∢ ELI = ∢ GMI.

§. 7. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade DE und FG mit einer dritten IH auf einerley Seite derselben zwey gleiche Winkel ELI, GMI bilden, wovon der eine innerhalb, der andere außerhalb der geraden Linien liegt: so sind dieselben parallel.

Beweis.

Wenn man vom Puncte K in der Mitte von LM das Perpendikel DF auf DE fallen läßt, so entstehen zwey Dreyecke DLK und MKF, welche gleich sind, weil nach der Annahme ∢ DLK = ∢ GMI oder ∢ KMF; ferner ∢ DKL = ∢ MKF, und endlich, nach der Construction, LK = KM. Daher ist auch ∢ KFM = ∢ LDK; aber ∢ LDK = R nach der Construction; folglich ist auch ∢ KFM = R. Die zwey geraden DE und FG

sind

sind daher beyde auf der nämlichen geraden DF senkrecht, und folglich unter sich parallel. (§. 1.)

Prüfung dieser Theorie.

Diese Theorie entspricht nicht ganz dem Scharfsinne ihres Verfassers, und unterscheidet sich nur darin von der Euclidischen, daß letztere viel kürzer und bündiger ist; denn der Verfasser geht in (§. 2.) von einem ähnlichen Satze, wie Euclid, als Grundsatz aus, der sich dahin bezieht, daß sich zwey gerade Linien, die mit einer dritten zwey innere Winkel bilden, deren Summe kleiner als zwey rechte ist, in ihrer Verlängerung nothwendig schneiden müssen. Euclid wollte von der ganzen mathematischen Welt verstanden seyn; allein der Verfasser in diesem §. 2. nur von jenen, die den Begriff der geraden Linie haben, und so, glaube ich, wird er sich selbst unverständlich bleiben. Bey ihm ist die gerade Linie der kürzeste Weg von einem Puncte zum andern; eine Erklärung, die man wohl annehmen kann, weil wir keine bessere haben, die aber doch den Begriff der geraden Linie so lange unbestimmt läßt, bis gezeigt ist, was der kürzeste Weg sey, und da fällt man doch offenbar in einen Cirkel im Schließen. Wie kann er demnach aus diesem Begriffe der geraden Linie schon zugeben,

ben, daß (Fig. 1.) die schiefe DH die senkrechte FG schneiden müsse? Dies heißt doch wohl nichts anders als selbst die Auflösung der großen Schwierigkeit der Parallelen ohne allen Beweis zugeben wollen; eine Schwierigkeit, welche der Verfasser in der Anmerkung dieses Paragraphs selbst nicht verkennt, und die Leichtfertigkeit vieler Autoren mit Recht tadelt, die hierüber gleichsam wegspringen, und von der Unvollkommenheit der Theorie der Parallelen nicht einmal einige Meldung thun. Hieraus folgt aber nicht, daß sich der Scharfsinn der Mathematikverständigen an der Berichtigung des Euclidischen Axioms nicht ferner üben soll. Im Gegentheile werden die Bemühungen bewährter Geometer immer mit Interesse aufgenommen werden, so lange nicht die Unmöglichkeit gezeigt ist, die Parallel-Theorie mit Evidenz darzustellen. Als Grundsatz ist das Euclidische Axiom, wie bekannt, offenbar nicht evident genug, um, wie sich Lacroix ausdrückt, in den Rang der ersten Begriffe, die unmittelbar von der Sensation*) entstehen, gesetzt zu werden.

Um aber doch jene zu befriedigen, die ein für allemal mit Recht bindende Beweise fordern, versucht er eine Demonstration welche von Bertrand

*) Hier deutet der Verfasser wahrscheinlich auf des berühmten Condillac's Werk: Traité des Sensations.

trand *) genommen ist, und deren Werth ich nun untersuchen will.

Man muß zugeben, daß, wenn man einen gegebenen Winkel edh (Fig. 2.) mehrmal zusammen addirt, endlich ein Winkel entstehen muß, der größer als der rechte Winkel edb ist. Eben so gewiß ist es, daß der unbegrenzte Streifen EDFG den rechten Winkel EDB nicht ausfüllen kann. Allein wenn der Verfasser hieraus schließen will, daß der Schenkel DH des Winkels EDH das Perpendikel FG schneiden muß, so ist sein Schluß nicht nur nicht bindend, sondern ganz unrichtig, und zwar aus folgenden Gründen:

1.) Um einen Winkel auszumessen, muß der Maaßstab (die Einheit) wieder ein Winkel seyn. Der Winkel edh kann demnach den rechten Winkel edb ausmessen, oder einen größeren edh''''. Der Streifen EDFG ist aber kein Winkel, sondern ein unbegrenzter Raum; er kann demnach nicht zum Maaßstabe dienen, den rechten Winkel EDB auszumessen.

2.) Die Größe des Winkels EDB hängt keineswegs von dem unbegrenzten Raume zwischen seinen Schenkeln, sondern von derselben Neigung ge-

---

*) Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques, par *Bertrand*. 2 Vol. in 4to Genève 1778.

gegen einander ab. Wenn demnach der Winkel EDH den rechten EDB ausmessen kann, nicht aber der Streifen EDFG, so liegt die Ursache davon nicht darin, als hätte der Winkel EDH eine größere Seiten-Ausdehnung als der Streifen EDFG, sondern dieses hat nur deswegen statt, weil das Maaß (der Winkel EDH) mit der zu messenden Größe EDB homogen ist.

3.) Die Ausmessung des Winkels EDB hängt auch ferner nicht von der Größe des Schen- DH ab. Jeder Winkel eDh, der dem EDH gleich ist, kann den rechten EDB eben so gut messen, als EDH, und folglich hängt das Zusammentreffen der GF mit dem Schenkel DH nicht von der Größe des Winkels EDH, wohl aber von der Größe des Schenkels DH ab.

4.) Der Verfasser hätte daher auf eine andere Art zeigen müssen, daß der Raum zwischen DH und FG einmal begrenzt, d. h. daß die FG von der DH geschnitten würde. Da er aber davon keine überzeugende Ursache angiebt, so beruht die Wahrheit dieses Satzes auf keiner strengen geometrischen Demonstration, sondern, um mit ihm zu sprechen, auf der bloßen Sensation, d. h. auf der unmittelbar sinnlichen Wahrnehmung. Die übrigen Sätze (von 3 bis 7), welche man als richtige Schlußfolgen aus dem Vorhergehenden ansehen kann, sind alle auf die §. §. 1 und 2. gestützt. Da ich nun aber gezeigt habe, daß die Stütze dieses ganzen Gebäudes auf keiner streng geometrischen

Dar-

Darstellung, sondern lediglich auf einem willkühr-lich angenommenen Grundsatze beruhet, so kann man mit Recht sagen, daß der Verfasser durch seine Theorie der Parallelen nichts zu deren Vervollkommnung beygetragen habe: und dies um so mehr, als er den Satz, der gerade die Schwierigkeit dieser Lehre enthält, als Grundsatz anzunehmen kein Bedenken trägt. Wahrscheinlich läßt sich aber ein um die Mathematik so verdienter Gelehrter, wie Lacroix ist, dessen Geist in den höhern Theilen dieser Wissenschaft unebene Wege zu bahnen und bisher unübersteigbare Schwierigkeiten zu heben sucht, nicht gern zur Untersuchung der Elementar-Sätze der Geometrie herab: er begnügte sich daher nur, dem Anfänger die Unvollkommenheit dieser Theorie zu zeigen, und die Eigenschaften der Parallelen aus einem Grundsatze herzuleiten, den der Anfänger des geometrischen Studiums sehr willig für einen solchen annimmt.

Achter Abschnitt.

Die Theorie

von

Joh. Fried. Lorenz. *)

Um die Theorie des Verfassers im Zusammenhange zu übersehen, will ich hier die verschiedenen Sätze ausheben, deren er sich zur Begründung derselben bedient und zu einem gemeinschaftlichen systematischen Ganzen ordnen, und dann eine kurze Critik darauf folgen lassen, woraus es sich ergeben wird, daß auch diese Darstellung nicht mehr befriedigend sey, als alle übrigen Systeme über diese Lehre.

§. 1. Forderung.

Von jedem Puncte zum andern eine gerade Linie zu ziehen.

§. 2.

*) Grundriß der reinen und angewandten Mathematik von Joh. Fried. Lorenz, Conventual am Stift und Kloster Berge bey Magdeburg, und Oberlehrer der Pädagogic daselbst. Erster Theil. Helmstädt. 1791. 8.

§. 2. Grundsatz.

Eine unbegrenzte gerade Linie theilt die unbegrenzte Ebene, worin sie gezogen ist, in zwey Stücke, die an ihren entgegengesetzten Seiten liegen.

§. 3. Grundsatz.

Zwey gerade Linien, die zusammentreffen, daß sie einen Winkel bilden, (Tab. VI. Fig. 6.) haben nur Einen Punct E mit einander gemein, und schneiden, wenn man sie verlängert, einander in diesem Puncte.

§. 4. Grundsatz.

Jede gerade Linie EF (Fig. 7.) durch einen Punct D innerhalb einer Figur schneidet; genugsam verlängert, den Umfang wenigstens in zwey Puncten, (§. 2.) folglich, wenn die Figur geradlinigt ist, wenigstens zwey von ihren Seiten (§. 3.)

§. 5. Grundsatz.

Jede gerade Linie durch einen innerhalb der Oeffnung eines Winkels BED (Fig. 1.), gegebenen Punct F schneidet, genugsam verlängert, wenigstens Einen seiner Schenkel.

Denn

Denn da sich die Schenkel beliebig über den gegebenen Punct hinaus verlängern lassen, (§: 2.): so kann man die Oeffnung des Winkels mit einer dritten geraden Linie GH (§. 1.) so schließen, daß der gegebene Punct innerhalb des Triangels liegt; da denn die gerade Linie durch diesen Punct, genugsam verlängert, wenigstens zwey Seiten des Triangels (§. 4.), folglich gewiß Einen Schenkel des Winkels BED schneidet.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien AB und CD (Fig. 8.) mit einer dritten EF, die sie schneidet, zwey innere entgegengesetzte Winkel BGH und DHG zusammen kleiner als zwey rechte machen: so laufen sie, genugsam verlängert, auf dieser Seite zusammen.

Beweis.

Da BGH + DGH, $<$ 2 R; und EGB + BGH = 2 R, so ist EGB + BGH $>$ BGH + DHG; folglich EGB $>$ DHG, und, weil AGH = EGB, auch AGH $>$ DHG.

Macht man also EGK = DHG, und verlängert KG nach L, daß LK mit CD parallel ist, so fällt LK zwischen die Schenkel der Winkel EGB und AGH, und macht mit GB einen

einen Winkel LGB, zwischen dessen Schenkeln der Punct H, durch den die CD geht, befindlich ist. Diese muß also Einen Schenkel des Winkels LGB schneiden (§. 5.). Nun kann sie LG, mit der sie parallel ist, nicht schneiden. Folglich schneidet sie GB, und trifft also mit der AB an dieser Seite zusammen.

Prüfung dieser Theorie.

Wirft man einen prüfenden Blick auf diese Theorie, so ergiebt es sich sogleich, daß ihre ganze Stärke auf der Behauptung beruhe, welche ihr Verfasser (§. 5.) in einem Grundsatze vorträgt. Kann dieser Satz als ein eigentliches Axiom bestehen, so besteht auch hierdurch das ganze Gebäude, welches hierauf errichtet ist. Fehlt es ihm aber an den Eigenschaften eines annehmbaren Grundsatzes, an einer überzeugenden Evidenz, so muß man auch hierbey gestehen, daß dem Verfasser die Ehre einer vollkommenen Berichtigung der Parallelen nicht zu Theil werden könne. Daß dieses Letztere nun wirklich der Fall sey, wird wohl kein Geometer aus der Schule Euclids zu läugnen vermögen, wenn er bedenkt, daß dem §. 5. lange nicht jener Grad der geometrischen Evidenz zukomme, den man von einem Grundsatze zu fordern

dern berechtigt ist. Wenn der Winkel DEB, (Fig. 6.) ein sehr spitzer ist, so könnte es wohl scheinen, als müsse man einmal auf eine Linie GH kommen, welche den Punct F in den Flächenraum des Dreyecks GEH einschließe. Allein dieses lehrt hier nur der Augenschein, der da, wo es auf eine strenge Demonstration ankömmt, gewiß nicht die Stelle eines befriedigenden Beweises vertreten kann. Eben hierin liegt ja die Stärke einer geometrischen Darstellung, daß sie weiter geht, als der bloße Augenschein zeigt, und daß sie wegen ihrer strengen Allgemeinheit sich auf Fälle erstreckt, welche der bloße sinnliche Schein gar nicht zu entscheiden vermag. — Man betrachte nur einen sehr stumpfen Winkel und einen Punct zwischen dessen Schenkeln. Wenn man nun gleich in diesen Schenkeln beliebige Puncte nimmt, und durch sie gerade Linien von einem Schenkel zum andern zieht, so kann man sich gewiß nicht sinnlich überführen, daß dieser zwischen den Schenkeln angenommene Punct nothwendiger Weise einmal in ein solches Dreyeck eingeschlossen werden müsse. Nach dem bloßen Augenschein würde man dies sogar für unmöglich halten können. Der Beweis muß also hier immer weiter gehen, als die bloß sinnliche Wahrnehmung, und gerade hierin liegt der Vorzug streng wissenschaftlicher Theorien, vor der gewöhnlichen Erfahrung. Von dieser Seite betrachtet gebricht es also dem Systeme des Verfassers offenbar an dem erforderlichen Grade von Einfachheit und Klarheit.

Noch weniger kann man aber diesem Grundsatze beytreten, wenn man ihn als eine Folge der Sätze (§. 1. — §. 4.) ansieht. Es läßt sich schlechterdings nicht einsehen, wie man (Fig. 6.) aus der möglichen unbeschränkten Verlängerung der Schenkel ED und EB nothwendig einmal auf Puncte kommen müsse, wie G und H, wo man durch die GH den Punct F in ein Dreyeck EGH einschließen kann. Da nun die Nothwendigkeit eines solchen Dreyecks gänzlich unbewiesen ist, so können auch alle übrigen Sätze und besonders der Lehrsatz (§. 6.) dessen Beweis sich hauptsächlich darauf gründet, nicht als hinlänglich erwiesene Wahrheiten angesehen werden. Zur größeren Erläuterung dieser Critik beziehe ich mich hier noch auf die Bemerkungen, welche bey der Segnerischen Theorie über diesen nämlichen Gegenstand weiter aus einander gesetzt worden sind, und ziehe aus dem Bisherigen den Schluß, daß auch diese Theorie keine befriedigende Auflösung des schwierigen Problems gewähre.

Neunter Abschnitt.

Die Theorie

von

Joh. Andreas Segner. *)

Der Verfasser hat die nachstehende Theorie nicht im Zusammenhange vorgetragen, und obgleich er die dabey obwaltende Schwierigkeit fühlte, so scheint es doch, als habe er den Parallelen den Rang nicht eingeräumt, den sie in der Geometrie verdienen; denn er hat sie stückweise und so dargestellt, daß er weder auf das Schwierige derselben aufmerksam macht, noch die verschiedenen Schlußfolgen gehörig zusammenstellt.

Ich will daher die Grundlagen seines Systems aufsuchen, die daraus folgenden Sätze und Schlüsse aneinander gereiht vortragen,

*) Aus seinen Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie. Lemgo 1747. in 4.

und nachher über die Bündigkeit derselben urtheilen.

§. 1. Lehrsatz.

Wenn man innerhalb der Schenkel eines Winkels ABC (Tab. V. Fig. 1.) einen Punct H annimmt, so läßt sich immer ein Dreyeck BDE verzeichnen, welches diesen Punct in seine Fläche einschließt.

Beweis.

Man lege durch zwey beliebige Puncte M und N die gerade Linie MN. Schließt nun das Dreyeck BMN den Punct H noch nicht ein, so kann man die MN, die man sich verlängert vorstellt, immer mehr auf den Schenkeln des Winkels, die keine bestimmten Grenzen haben, von B entfernen, bis sie eine Lage wie DE bekömmt, und demnach den Punct H, der seinen Abstand von B nicht ändert, in seine Fläche eingeschlossen hat.

§. 2. Zusatz.

Zieht man durch den also eingeschlossenen Punct H eine gerade Linie, wie man nur immer will, so muß diese nothwendig zwey Seiten des Dreyecks BDE schneiden. Daher ist unter diesen allezeit wenigstens eine der zwey Seiten BD

und BE, die den Winkel B einschließen, in welchen man den Punct H gesetzt hat.

§. 3. Zusatz.

Eine gerade Linie also, welche man durch einen Punct H (Fig. 2.) innerhalb eines Winkels ABC zieht, nach welcher Richtung man will, schneidet wenigstens einen der Schenkel des Winkels, wenn man sowohl diese Linie MN als die Schenkel des Winkels gehörig verlängert.

§. 4. Erklärung.

Diejenigen geraden Linien, welche in einerley Ebene liegen, und nicht zusammenlaufen, wenn man sie verlängert, so weit man will, heissen Parallellinien.

Anmerkung. Der Verfasser setzt gleichfalls die drey Euclidischen Bedingnisse fest, unter welchen die Linien parallel sind, deren Darstellung jedoch hier keine besondere Erwähnung verdient.

§. 5. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien AB und DE (Fig. 3.) parallel sind, und eine dritte Linie FG schneidet eine derselben DE, so muß eben die Linie FG, wenn sie verlängert wird, auch die an-

andere AB schneiden, wenn man auch diese gehörig verlängert.

Beweis.

Die Linien DE und FG machen den Winkel DCG mit einander, und die AB geht durch einen Punct innerhalb dieses Winkels DCG, welchen man sich in der AB vorstellen kann, wo man will. Folglich muß nach (§. 3.) die Linie AB wenigstens eine der Linien DC und CG, oder, welches dasselbe ist, eine der DE und FG schneiden, und von derselben gleichfalls geschnitten werden. Es ist aber nicht möglich, daß die Linien AB und DE einander schneiden, weil sie parallel angenommen sind, folglich schneidet AB die FG und wird von derselben geschnitten.

§. 6. Zusatz.

Durch einen gegebenen Punct C giebt es nur eine einzige gerade Linie DE, welche der AB parallel läuft. Denn jede andere Linie FG, die durch C geht, schneidet die DE; sie schneidet also auch die AB (§. 5.) und kann demnach mit AB nicht parallel seyn.

§. 7. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien AB, CD (Fig. 4.) parallel sind, und man schneidet sie beliebig durch

durch eine dritte Linie EF: so sind die Wechselwinkel CEF, EFB gleich.

Beweis.

Gesetzt diese Winkel wären ungleich, und es sey $\sphericalangle CEF > \sphericalangle EFB$, so mache man den $\sphericalangle GEF = \sphericalangle EFB$. In diesem Falle wäre GE par. AB durch den Punct E. Aber durch denselben Punct ist schon CD par. AB angenommen. Es gäbe demnach durch Einen Punct E zwey Parallelen mit AB, welches dem Zusatze §. 6. widerspricht. Folglich kann $\sphericalangle CEF$ nicht größer als $\sphericalangle EFB$ seyn. Der Beweis würde eben so geführt werden können, wenn man annehmen wollte, daß $\sphericalangle CEF < \sphericalangle EFB$ wäre. Da nun $\sphericalangle CEF$ weder $> \sphericalangle EFB$, noch $< \sphericalangle EFB$ ist, so hat man $\sphericalangle CEF = \sphericalangle EFB$, und folglich macht die Linie EF, welche die Parallelen schneidet, die Wechselwinkel gleich.

Anmerkung. Aus diesem Lehrsatze, der hier, so viel möglich abgekürzt wurde, beweiset nun der Verfasser, daß auch der innere Winkel EFB dem äußeren DEI, und die Summe der beyden innern EFB und DEF gleich zweyen Rechten sey, welches auch leicht einzusehen ist.

§. 8. Zusatz.

Wenn man von einem beliebigen Puncte E der einen Parallele (Fig. 4.) das Perpendikel

EK

EK auf die andere Parallele fällt, so entstehen auch bey E rechte Winkel, denn nach der Anmerkung des vorigen §. ist ∢ EKB + ∢ KED = 2 R; aber es ist schon ∢ EKB = R; folglich auch ∢ KED = R.

Anmerkung. Hieraus folgert nun der Verfasser noch weiter, daß zwey gerade Linien, wenn sie mit einer dritten parallel laufen, und mit ihr in einerley Ebene liegen, auch unter sich parallel sind, und daß zwey Parallelen allenthalben gleichen Abstand von einander haben. Die Beweise, die er giebt, sind die gewöhnlichen und folglich bekannt.

Prüfung dieser Theorie.

Die Sätze, welche hier im Zusammenhange vorgetragen sind, beruhen, wie man leicht sieht, auf dem ersten Lehrsatze, als Grundlage des ganzen Systems, der nun hier gehörig untersucht werden muß.

Dieser Satz soll beweisen, daß ein Punct H (Fig. 1.), der zwischen den Schenkeln eines Winkels ABC eine endliche Entfernung BH von der Spitze B hat, in die Fläche eines Dreyecks eingeschlossen werden könne. Der directe Beweis, den

den der Verfasser giebt, beruht auf der Möglichkeit der Verlängerung der Schenkel eines Winkels, so weit man will, und auf einem der ersten Postulate der Geometrie, daß es durch zwey Puncte immer eine gerade Linie giebt, die sich so weit man will verlängern läßt. Der Verfasser bleibt also in so weit ganz in den Grenzen der Elementar Geometrie.

Allein soll der Beweis des Satzes bindend seyn, so muß er zeigen, wie es möglich sey, daß man in dem Fortrücken der Linie MN auf den Schenkeln des Winkels endlich auf eine Lage DE kommen müsse (Fig. 5.) deren Abstand in allen ihren Puncten vom Scheitelpuncte B größer ist, als die gegebene Entfernung BH des Puncts H vom besagten Puncte B. Mit dem bloßen Fortschieber der Linie MN auf den Schenkeln ist noch gar nicht das Verhältniß darzuthun, welches die Länge des Schenkels BD zu der BH hat; und doch ist es nothwendig dieses zu kennen, um gewiß zu seyn, ob man die MN weit genug von B entfernt habe oder nicht.

Wollte man BF = BG = BH machen, so gieng die FG nicht durch den Punct H, sondern fiel über denselben, wegen BL < BF. Dadurch hätte man sich wohl dem Puncte H sehr genähert; allein man wüßte nun eben so wenig wie zuvor, wieviel man die FG von B entfernen müßte, um den Punct H einzuschließen.

Woll-

Wollte man aber das Verhältniß der Länge der Schenkel zu der gegebenen Entfernung bestimmen: so müßte man überzeugend darthun, daß gleiche Theile der Schenkel auch gleiche Theile der BH abschnitten. Machte man z. B. BN = BM = NO = MP = OF = PG, so müßte man zeigen, daß auch BI = IK = KL sey. Wäre dieses bewiesen, und man machte BO = BP = 2 BN und BE = BD = 4 BN u. s. w. so würde gleichfalls IK = 2 BI; KT = 4 BI u. s. w. seyn. Weil nun die Linien BI, BK, BF u. s. f. in einer geometrischen Progression wie die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16 ... fortgehen, so ist leicht einzusehen, daß man endlich auf Linien kömmt, die größer als die gegebene Entfernung des Puncts H von B sind, und daß auf diese Art der Punct H gewiß einmal eingeschlossen würde.

So müßte der Beweis geführt seyn, wenn er überzeugende Gewißheit gewähren soll; aber die Darstellung des Verfassers ist weit davon entfernt, und der Grund warum in seinem Beweise die heruntergeschobene Linie MN den Punct H einmal in das Dreyeck einschließen soll, ist eben so wenig bewiesen, als der Satz es wäre, daß jede andere Linie, die mit einer gegebenen nicht parallel ist, dieselbe schneiden muß, d. h. der Beweis ist auf den Augenschein berechnet, welches in der Geometrie durchaus nicht seyn darf, weil die geometrischen Wahrheiten auch noch für Blinde Wahrheiten bleiben, und das Augenmaaß un-

unser geometrischer Maaßstab nicht seyn kann.

Der Satz aber, daß sich die Linie BF mit den Schenkeln proportionirt theilen läßt, ist bisher ohne die Theorie der Parallelen selbst vorauszusetzen, von keinem Geometer überzeugend dargethan worden, und derjenige, der dieses könnte hätte die Schwierigkeit der Parallelen selbst gelöset.

Was die folgenden Sätze betrifft, die auf den Lehrsatz §. 1. als Grundlage gebaut sind, so geht der Verfasser ganz consequent zu Werke, nur daß er sich im Beweise des Lehrsatzes §. 5. übereilt, wenn er daselbst sagt: welchen Punct man sich in AB vorstellen kann, wo man will (Fig. 5.). Gewiß ist es, daß, wenn man sich vom Puncte C das Loth CH auf AB vorstellt, der Punct H innerhalb den Schenkeln des Winkels DCG oder, bey einer andern Lage der fg, wie z. B. f′g′, zwischen die Schenkel des Winkels g′CE falle, und daß bey der vorausgesetzten Wahrheit seines Satzes §. 1., die AB die fg, oder f′g′ schneiden müsse. Dies wird auch noch von allen Puncten der AB, die rechts von H liegen für die Lage f′g′, und die links von H liegen für die Lage fg statt haben. Aber läßt sich denn dies auch auf Puncte links von H für die Lage fg sagen? Gewiß nicht. Denn, weil sich der Durchschnittspunct der fg mit AB nicht angeben läßt, so kann man auch nicht mit Gewiß-

heit

heit behaupten, ob der gewählte Punct H in AB innerhalb oder außerhalb den Schenkeln des Winkels DCE liege. Das nämliche gilt für die Lage f′g′.

Da nun der angeführte erste Lehrsatz der Segnerischen Theorie ganz und gar unbewiesen, und mehr als Postulat angenommen ist, so müssen nothwendig die folgenden Sätze, die alle auf denselben als Stütze gebaut sind, mangelhaft und beweisloß dastehen, und man kann daher mit Recht sagen, daß die Bemühungen des Verfassers fruchtlos waren, die schwierige Theorie der Parallelen zu berichtigen.

Zehnter Abschnitt.

Die Theorie von Nassareddin*).

Nachstehende Theorie der Parallelen befindet sich in einer gedruckten arabischen Uebersetzung der Elemente Euclids, wovon Kästner in der Geschichte der Mathematik a. a. O. ausführlichere Nachricht mittheilt. Der Titel des Werks ist zur Hälfte arabisch und zur Hälfte lateinisch. Dieses Letztere heißt: Euclidis Elementorum geometricorum libri tredecim. Ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini nunc primum arabice impressi. Romae in typographia Medicea MDXCIV. Cum licentia superiorum. Der vollständige Name dieses gelehrten Arabers ist

*) Man sehe: Geschichte der Mathematik von Abraham Gotthelf Kästner. Göttingen 1796. gr. 8. I. Band. Seite 367 bis 381.

ist (nach Casiri Bibl. Hisp. Arab. Escur. Tom. I. pag. 187.) folgender: Kheuageh Nassareddinus Mahamad Ben Hassan Persa Thusensis, wo zugleich noch eine Stelle vorkömmt, welche ihn als berühmten Schriftsteller auszeichnet. Es heißt nämlich? Observationes Astronomicas in urbe Magara fecit, vir in omni philosophiae genere insignis. Multos composuit libros, logicos, physicos, metaphysicos, nec non Euclidem et Magestum, (id est systema Geometricum et Astronomicum). Er starb im Jahre der Hedschra 672 oder 1273 nach unserer Zeitrechnung.

Ich theile diesen arabischen Versuch und dessen Critik, mit den nöthigen Veränderungen und Abkürzungen des Vortrags, den Lesern hier um so lieber mit, da derselbe noch sehr unbekannt ist, und als ein interessanter Beytrag zur Geschichte dieser Lehre angesehen werden kann.

Der arabische Geometer gründet seine neue Berichtigung auf drey Vordersätze.

I. Vordersatz.

In einem willkührlichen Puncte f, (Fig. 6.) der geraden Linie DC sey ein Perpendikel fe errichtet, durch dessen Endpunct e eine gerade Linie AB dergestalt geht, daß der Winkel feB ein spizzer und feA ein stumpfer ist. Hier ist jede senkrechte Linie von dem Theile eB auf fD kürzer als

als die fe, jede macht mit eB einen stumpfen Winkel gegen e und einen spitzen Winkel gegen B zu. Also ist jedes Perpendikel von einem Puncte, der weiter von e linker Hand liegt, kürzer, als das von einem Puncte, der näher bey e linker Hand liegt. So werden also diese Perpendikel immer kürzer, und die obere Linie AB nähert sich gegen B immer der untern CD, wie sie sich gegen A mehr von ihr entfernt.

Dieser Einleitungssätze, sagt er, hat sich ein Theil älterer und neuerer Geometer bedient, um damit den Anfang zu macheu.

II. Vordersatz.

Auf eine gerade Linie AB, (Fig. 7.) richte man gleiche Perpendikel AD, BC auf, und ziehe CD, so macht diese CD mit den beyden gleichen Perpendikeln rechte Winkel $ADC = BCD$.

Denn wäre ADC nicht ein rechter, so wäre er spitz oder stumpf. Im ersten Falle nähert sich DC der AB linker Hand, und es ist $BC < AD$ (I. Vordersatz). Im zweyten Falle entfernt sich DC von AB linker Hand, und es ist $AD < BC$.

Auch folgt, daß $CD = AB$ ist.

III. Vordersatz.

In jedem geradlinigten Dreyecke sind die drey Winkel zweyen rechten gleich.

Wenn

Wenn das Dreyeck ABC, (Fig. 8.) bey b einen rechten Winkel hat, so ziehe man der BA eine gleiche Parallele CD, und verbinde AD. Hier sind (II. Vorders.) BAD und CDA rechte Winkel, und AD = BC; folglich ist △ ABC ≡ △ CDA und ∢ BCA = ∢ DAC. Aber ∢ DAC + ∢ CAB = BAD = R; folglich ist auch ∢ BCA + ∢ BAD = R, und daher denn ∢ BCA + ∢ BAD + ∢ ABD = 2 R.

Jedes schiefwinkliche Dreyeck wird in zwey rechtwinkliche verwandelt, und so auch von diesen der Satz leicht bewiesen.

Zur Anwendung dieser Vordersätze auf den Beweis des Hauptsatzes wird es genug seyn, nur den ersten Theil desselben darzustellen; nämlich den Satz: zwey gerade Linien stoßen zusammen, wenn mit einer dritten die erste einen rechten und die andere einen spitzen Winkel bildet. Die beyden übrigen Theile, wenn statt des rechten ein spitzer oder ein stumpfer ist, dessen Summe mit dem spitzen der andern Linie weniger als zwey rechte beträgt, gründen sich bekanntlich auf ihn.

Der Gang von Nassareddins Beweis ist nun dieser:

Man stelle sich eine gerade Linie EF, (Fig. 9.) vor, welche gegen F unbestimmt verlängert ist. Aus

Aus einem willkührlichen Puncte D in EF sey ein unbestimmtes Perpendikel DH errichtet, und an E liege unter einem spitzen Winkel FEB eine unbegrenzte Linie EB. Es soll hier bewiesen werden, daß DH und EB zusammenstoßen müßen.

In EB nehme man einen willkührlichen Punct C, und fälle von ihm auf EF das Perpendikel CG. Hier fällt G entweder auf D, oder weiter von E als D, oder näher bey E als D.

Im ersten Falle ist GC, d. h. das Perpendikel DH, bis zum Zusammenstoßen mit EB verlängert.

Im zweyten Falle ist CGE ein rechtwinkliches Dreyeck, $\sphericalangle CGE = R$ und CE zu Hypotenuse hat. Hier geht DH innerhalb der Fläche dieses Dreyecks mit GC gleichlaufend, folglich schneidet sie gewiß die Hypotenuse CE.

Für den dritten Fall trage man auf EF gegen F hin Linien, deren jede $= EG$, so lange, bis sie zusammen eine Linie EX ausmachen, welche größer als ED ist, so liegt D zwischen E und X. Eben so viele Linien, jede $= EC$, trage man auf EB gegen B hin. Sie betragen die Linie EV. Nun ziehe man VX. Ist diese bey X senkrecht auf EF, so ist EVX ein rechtwinkliches Dreyeck und EV dessen Hypotenuse. Mit seiner Höhe XV geht DH parallel durch einen Punct D zwischen E und X. Also muß diese

DH hinlänglich verlängert die Hypotenuse EV durchschneiden.

Aus dieser Uebersicht der Darstellung Nassareddins ist ersichtlich, daß alles darauf ankömmt, ob VX auf EF senkrecht stehe oder nicht. Außerdem weiß man nicht, daß DH par. XV, und ist dies nicht, so könnte diese DH die XV durchschneiden, wo es denn unentschieden bliebe, ob sie die verlängerte EV noch durchschneiden müßte.

Nun der eigene Beweis des Nassareddin.

Auf der Linie EF hat man GK = EG genommen, und CP = EC auf der Linie EB. Man ziehe durch E auf EF ein Perpendikel EM = GC, und ziehe CM. Diese ist (II. Vorders.) so groß als EG und macht mit EM, CG rechte Winkel.

Nun lasse man auch aus dem Puncte P eine senkrechte Linie PK auf EF herab, so ist, da die Linien EB, EG ihre Richtung, sich von einander zu entfernen, nach der Seite B zu haben, diese senkrechte Linie PK größer als CG (I. Vorders.)

Man schneide von ihr die Linie KQ, gleich der senkrechten GC, ab, und ziehe zwischen den Puncten Q, C eine gerade Linie, so ist jeder der beyden Winkel GCQ, KQC ein rechter und die Seite

Seite KG gleich der Seite QC (II. Vorders.) Der Winkel GCM ist aber ein rechter, und die Linie CM hat einen Punct mit der Linie QC; ja die Linie MQ ist nur Eine. Da nun der Winkel CQK ein rechter ist, so ist der Winkel CQP auch ein rechter. Nun sind die Scheitelwinkel MCE, QCP gleich, und die Seite EC vom Dreyecke CEM gleich der Seite CP vom Dreyecke CPQ, und die Seite CM = CQ, KG = CQ, GE = GM = KG.

Prüfung dieser Theorie.

Nach der bisherigen Darstellung wird es nun nicht schwer seyn, das System des Nassareddin gehörig zu würdigen, und dasselbe als einen ebenfalls mißlungenen Versuch zu characterisiren. Es fällt hierbey sogleich in die Augen, daß eigentlich die Vordersätze die Grundlage seyen, worauf die ganze Theorie aufgerichtet ist. Der Werth oder Unwerth derselben wird daher vorerst davon abhängen, ob diese Hülfssätze mit Evidenz bewiesen seyen oder nicht. So viel ist wenigstens ausgemacht, daß die Lehre von den Parallellinien im eigentlichen Sinne des Worts berichtigt wäre, wenn man den Beweis von irgend einem dieser drey Vordersätze mit mathematischer Strenge liefern könnte.

Ehe ich nun diese Sätze mit der Fackel der geometrischen Critik beleuchte, will ich dasjenige anführen, was Kästner (a. a. O. S. 376 u. 377.) hierüber vorbringt und seiner Prüfung einige erläuternde Bemerkungen beyfügen.

In dem §. 29. heißt es daselbst: Der erste Vordersatz sagt nicht etwa: Wenn man auf der obern Linie (Fig. 6.) gleiche Stücke nimmt, und von derselben Grenzpuncten Perpendikel herabläßt, so werden diese immer gleichviel kürzer. Er sagt nicht: die obere Linie nähere sich, wenn man auf ihr gleiche Stücke nimmt, der untern immer gleichviel; sondern er sagt nur überhaupt: sie nähere sich.

Aber auch dieses Nähern ist allgemein gesagt; da nicht bewiesen, nur angenommen. Selbst scheint Nassareddin dieses einleitende Urtheil auf Autorität der Geometer zu gründen.

Wenn man von f ein Perpendikel auf eB fällt, so ist dieses kürzer als fe, und wenn man von dem Puncte, wo es in eB eintrifft, ein Perpendikel auf fD fällt, so ist dieses kürzer als jenes; (beydes aus Eucl. I. B. 19. S.), also auch kürzer als fe.

Also, der Punct der Linie eB, auf welchen das erstgenannte Perpendikel fällt, ist näher bey fD, als der Punct e.

Aber

Aber zwischen ihm und f liegen in eB Puncte, von denen sich fragen läßt, ob jeder näher bey der untern Linie ist, als e? Bejahen wird man die Frage; aber womit beweißt man an dieser Stelle die Bejahung?

Solchergestallt giebt es Puncte der obern Linie, von denen nicht bewiesen ist, daß sie sich der untern nähern.

Also, wenn nichts unbewiesen angenommen wird, stelle man sich bey dem zweyten Vordersatze vor, AD, (Fig. 7.), sey senkrecht auf AB, und durch D eine Linie gezogen, die mit AD linker Hand einen spitzigen Winkel macht, ferner, in dieser Linie einen Punct C genommen, so ist nicht bewiesen, daß ein Perpendikel von diesem Puncte auf AB allemal kürzer seyn müsse, als AD. Nur alsdann ist das bewiesen, wenn C von D weiter wegliegt, als der Punct, in welchen die Linie, die den spitzigen Winkel macht, von dem Perpendikel von A auf sie, geschnitten wird. Also ist der zweyte Vordersatz nicht allgemein bewiesen.

Folglich auch nicht der dritte, der sich auf den vorigen gründet.

Betrachtet man Nassareddins ersten Vordersatz und dessen Anwendung zur Darstellung des zweyten: so springt sogleich in die Augen, daß es eigentlich darauf ankomme, zu zeigen, ein

je=

jeder Perpendikel, der aus einem willkührlich angenommenen Puncte in eB (Fig. 6.), oder ihrer Verlängerung auf die fD, oder ihre Verlängerung, gefällt wird, sey kleiner als ef. Ist dieses streng bewiesen, so giebt es mehr als eine Methode, nach welcher die Lehre von den Parallelen mit strenger Evidenz dargestellt werden kann. Dieses hat aber Nassareddin nichts weniger als bewiesen. Denn wenn er behauptet, ein jeder Perpendikel aus einem willkührlichen Puncte der eB auf die fD sey kleiner als die ef, und von zwey solcher Perpendikel müsse der immer der kleinere seyn, dessen Anfangspunct auf eB von e weiter entfernt angenommen wird, so ist dies eine blos willkührliche Annahme, die durch nichts dargethan ist. Eben so wenig hat Nassareddin gezeigt, was er von den Winkeln sagt, welche diese senkrechte Linien mit der eB bilden. Daß hierbey zur Linken immer ein spitzer und zur Rechten ein stumpfer Winkel sich befinden werde, bleibt wieder völlig unentschieden. Es erhellet also, daß die Behauptung des ersten Vordersatzes ein völlig unbewiesenes Postulat sey, welches nicht mit der gehörigen Schärfe dargestellt ist. Da sich nun hierauf die Wahrheit des zweyten und dritten Vordersatzes unmittelbar gründet, so sind auch diese beyden Sätze nicht gegen Einwürfe gesichert, und die ganze Grundlage von Nassareddins Theorie bleibt mangelhaft, wenn auch an der fernern Theorie, die er hierauf bauet, nichts Erhebliches mehr auszusetzen wäre, welches jedoch der Fall in der That nicht ist. Uebrigens

tritt auch bey dem zweyten und dritten Vordersatze die Bemerkung wieder ein, daß jeder von ihnen hinreichend wäre, um ein gründliches System der Parallellinien daraus herzuleiten, wenn man nur zeigen könnte, wie sich ihre Aussprüche streng geometrisch rechtfertigen lassen.

Die Kästner'sche Critik über diese Vordersätze scheint hier den Sinn Nassareddins nicht so richtig aufgefaßt zu haben. Um des Arabers ersten Vordersatz auszudrücken, ist es nicht gerade nöthig zu sagen: Wenn man auf der obern Linie gleiche Stücke nimmt, und von derselben Grenzpuncten Perpendikel herabläßt, so werden diese immer gleichviel kürzer; oder: die obere Linie nähert sich, wenn man auf ihr gleiche Stücke annimmt, der untern immer gleichviel. Es ist allerdings schon hinreichend zu zeigen, die Linie eB nähere sich der fD immer mehr und mehr, je weiter sie nach eB über B verlängert wird. Denn nur so viel erfordert der zweyte Vordersatz zur Wahrheit seiner Behauptung. Zieht man von f einen Perpendikel auf eB, von diesem Puncte in eB einen auf fD, von diesem letztern wieder einen auf eB, von diesem abermal einen zurück auf fD u. s. f., so ist wohl bewiesen, daß die durch diese Perpendikel auf der eB bestimmte Puncte der fD immer näher liegen, je weiter sie auf eB von dem Anfangspuncte e entfernt sind; allein es läßt sich hier niemals mit Gewißheit behaupten, daß man hierdurch auf der eB bis zu einem nach Belieben angenommenen

nen Puncte fortrücken werde. Dieses muß aber wohl bewiesen seyn, wenn der zweyte Vordersatz in seiner Allgemeinheit gelten soll, und dieses ist eigentlich die Klippe, woran das System des Arabers scheitert.

Weniger bedeutend ist der Einwurf, welchen Kästner von der Lage des ersten Perpendikels aus f auf eB vorbringt. Denn wenn der Punct in eB, (er heiße n), dessen kleinerer Abstand von fD (in Bezug auf ef) bewiesen werden soll, zwischen e und den Ort fiele, wo der Perpendikel aus f die eB durchschneidet, so ist es leicht mit Evidenz zu beweisen, daß dieser Punct n einen Abstand von fD habe, der kleiner als ef seyn muß. Um diesen höchst einfachen Beweis hier nicht noch einmal zu wiederholen, sehe man in dem letzten Abschnitte dieser Schrift, worin sich derselbe ausführlich befindet.

So viel über diese Vordersätze und ihren Werth zur Berichtigung der Parallel-Theorie. Ich muß nun noch den Gebrauch anzeigen, welchen Nassareddin hiervon zur Darstellung seines Systems macht. Es wird hinreichend seyn, nur den ersten Theil des Hauptsatzes darzustellen; nämlich den Satz: zwey gerade Linien müssen sich durchschneiden, wenn die eine von ihnen mit einer dritten, die beyde schneidet, einen rechten und die andere einen spitzen Winkel bildet.

Ich trage hierüber die Kästnersche Darstellung und Prüfung dieser Methode mit den gehörigen Abänderungen vor.

Man stelle sich eine gerade Linie EF (Fig. 9.) vor, errichte in dem willkührlichen Puncte D eine senkrechte Linie DH von unbestimmter Größe und lege an E einen ∢ FEB < R, so muß die verlängerte DH die gleichfalls verlängerte EB durchschneiden.

Man nehme in EB einen willkührlichen Punct C, und fälle von ihm auf EF das Perpendikel CG. Hier fällt G entweder auf D, oder weiter von E, als D, oder näher nach E als D.

Im ersten Falle ist GC, das Perpendikel DH, bis zum Zusammenstoßen mit EB verlängert. Im zweyten ist GCE ein Dreyeck, bey G rechtwinklich, welches EC zur Hypotenuse hat. Mit seiner Höhe GC geht DH innerhalb dieses Dreyecks parallel mit der Höhe, schneidet also gewiß die Hypotenuse. Für den dritten Fall trage man auf EF gegen F hin Stücke, jedes = EG, so vielmal, bis sie zusammen eine Länge Ex ausmachen, größer als ED, so daß D zwischen E und x liegt. Eben so viele Stücke, jedes = EC trage man auf EB gegen B hin. Sie machen eine Länge = EV.

Man

Man ziehe VX. Ist diese bey X senkrecht auf EF, so ist EVX ein rechtwinkliches Dreyeck; und dessen Hypotenuse EV. Mit dessen Höhe XV geht DH parallel durch einen Punct D zwischen E und X; also innerhalb des Dreyecks, und schneidet folglich, genugsam verlängert, die Hypotenuse.

Die Sache wird also darauf ankommen, ob VX senkrecht auf EF ist. Denn sonst weiß man nie sicher, daß DH parallel Xv sey, und ist sie dieses nicht, so könnte sie aus dem Dreyecke EVX zwischen V und X herausgehen, und wie sie denn weiter fortgienge, ob sie der Linie EB begegnete, bliebe unentschieden.

Dies ist Nassareddins Plan. Er selbst stellt die Uebersicht nicht so deutlich dar. Sein Beweis fängt so an: Auf der Linie EF hat man GK = EG genommen, und CP = EC auf der Linie EB. Man ziehe durch K auf EF ein Perpendikel KM = GC, und ziehe CM. Diese ist, nach dem zweyten Vordersatze, so groß als EG, und bildet mit KM und CG rechte Winkel.

So lasse man auch von dem Puncte P eine senkrechte Linie PK auf EF herab. Da die Linien EB und EG ihre Richtung, sich von einander zu entfernen, nach der Seite B zu haben, so ist die senkrechte PK > CG (I. Vorders.) Man schneide von ihr die Linie KQ, gleich der senkrechten

ten GC ab, und ziehe zwischen den Puncten Q, C eine gerade Linie, so ist jeder der beyden Winkel GCQ und KQC ein rechter, und die Seite KG gleich der Seite QC nach dem II. Vordersatze. Der Winkel GCM ist aber ein rechter, und die Linie CM hat einen Punct mit der Linie QC, ja die Linie MQ ist nur Eine. Da nun der Winkel CQK ein rechter ist, so ist der Winkel CQP auch ein rechter. Nun sind die Scheitelwinkel MCE und QCP gleich, und die Seite EC vom Dreyecke CEM gleich der Seite CP vom Dreyecke CPQ, und es ist CM = CQ, KG = CQ, und GE = CM = KG.

Nassareddin hatte zuvor gesagt, man sollte GK = EG nehmen; dies bestimmt also den Punct K. Jetzt sagt er: Nachdem man CP = EC genommen hatte, soll man auf EF von P das Perpendikel PX fällen. Dieses ist eine zweyte Bestimmung des Puncts K. Daß diese beyden Bestimmungen zusammentreffen, ist nirgends dargethan. Der Beweisführer nimmt entweder EK = 2 EG; EP = 2 EC, und zieht PK, so muß er zeigen; daß PKE ein rechter Winkel ist. Oder er nimmt EP = 2 EC und fällt das Perpendikel PK, so muß er zeigen, daß EK = 2 EG ist.

Nassareddin hat also in der Unternehmung, diesen Satz zu beweisen, das Schicksal so vieler Geometer vor und nach ihm gehabt, daß sie ihm mißlungen ist.

Eilfter Abschnitt.

Die Theorie
von
Adolph Kircher *).

Die gegenwärtige Abhandlung über die Parallel-Theorie zerfällt in zwey Theile. In dem ersten schickt der Verfasser verschiedene geometrische Grund- und Lehrsätze zum Voraus, deren er sich dann in dem zweyten Theile zur Begründung seines neuen Systems bedient. Die fünf Axiome und Vordersätze I bis XIII enthalten keine eigenthümliche Lehren und sind auch alle mit strenger Evidenz dargestellt. Mit dem Lehrsatze XIV. beginnt eigentlich zuerst das Eigene der Darstellung, welches ich hier mit dem nöthigen Abkürzungen des Vortrags mittheile.

§. 1.

*) Nouvelle Théorie des Parallèles, avec un appendice contenant la manière de perfectionner la Theorie des Parallèles de A. M. Legendre. A Paris. An XI. — 1803. 8.

§. 1. Lehrsatz.

Wenn sich auf der geraden Linie BD (Tab. VI. Fig. 1.) der Perpendikel AB unter dem bleibenden rechten Winkel ABD von B gegen D bewegt, so wird I. der Punct A eine Linie beschreiben, welche in allen ihren Puncten von der geraden BD einerley Abstand hat; und II. ist diese Linie AC selbst eine gerade Linie.

Beweis.

Da sich der nämliche Perpendikel AB auf der geraden Linie BD fortbewegt, so beschreibt immer der nämliche Punct A die Linie AC; da nun ferner ein Perpendikel den Abstand eines Puncts außerhalb einer geraden Linie von dieser geraden Linie mißt, so muß I. der Punct A eine Linie beschreiben, worinn alle Puncte von der geraden BD gleichweit entfernt sind.

Diese Linie AC wird eine gerade Linie seyn, wenn man beweisen kann, daß drey Puncte in derselben, wo man sie auch nur annehmen mag, stets in gerader Linie liegen. Denn in einer krummen Linie sind nie drey Puncte in gerader Linie, und in einer gebrochenen Linie kann man immer drey Puncte finden, welche nicht geradlinigt liegen.

Nähme man nun an, daß drey beliebige Puncte in der Linie AC nicht gerade lägen, so stell-

stellten diese Puncte die Spitzen eines Dreyecks vor, und wären deshalb von der geraden BD ungleich entfernt, welches unmöglich ist. Folglich müssen die drey Puncte, weil in der Linie AC alle Puncte von der BD gleichweit entfernt sind, in einer geraden Linie liegen; daher ist die AC eine gerade Linie.

§. 2. Lehrsatz.

Wenn man auf der geraden Linie MN (Fig. 2.) in verschiedenen Puncten die gleichen Perpendikel AB, BE, CF u. s. f. errichtet, und die Endpuncte D, E, F u. s. w. durch die geraden DE, EF u. s. f. verbindet, so wird die Linie DEF eine einzige gerade seyn.

Beweis.

Um zu wissen, daß DEF eine gerade Linie sey, muß bewiesen werden, daß sich die drey Puncte D, E, F in einer einzigen geraden befinden.

Nimmt man nun an, diese drey Puncte befinden sich nicht in gerader Linie, so läßt sich immer eine gerade Linie durch die Puncte D und F ziehen, zwischen welchen der dritte Punct E liegt, welcher, er mag sich oberhalb oder unterhalb der DF befinden, doch immer in den Perpendikel BE fallen muß.

Denkt

Denkt man nun, daß sich der Perpendikel AD auf MN gegen N bewegt, dergestalt, daß der Punct A in C und der Punct D in F angekommen sey, so hat dieser Punct D eine gerade Linie beschrieben (§. 1.). Da es aber durch zwey Puncte nur eine einzige gerade Linie giebt, so wird die gerade DF mit der geraden Linien zusammenfallen, welche durch Bewegung des Puncts D der senkrechten Linie AD erzeugt wurde. Weil nun ferner diese letztere Linie von der geraden MN überall gleichen Abstand hat, so folgt, daß jeder Perpendikel von Puncten der DF auf die MN zwischen D und F, der senkrechten Linie AD gleich seyn müsse (A.).

Soll nun der Punct E nicht in der geraden Linie DF liegen, so falle er entweder über diese Linie, z. B. in G; d. h. man nehme BG = AD = CF, so ist BG > BE. Allein nach dem, was bewiesen wurde (A), ist AD = BE. Es wäre also BG größer und zugleich auch so groß als AD, welches unmöglich ist. Folglich kann der Punct E nicht oberhalb der Linie DF fallen.

Eben so kann gezeigt werden, daß der Punct E nicht unterhalb der Linie DF fallen kann. Gesetzt es sey BH = AD = CF; so hat man BH < BE; allein es ist auch BE = AD (A.), folglich BH < AD; daher wäre die BH zugleich kleiner und so groß als AD, welches unmöglich ist. Folglich fällt der Punct E nothwendiger Weise in die gerade DF und DEF ist eine einzige gerade Linie.

Da das Gesagte von allen gleichen Perpendikeln gilt, so erhellet daraus die Allgemeinheit des Beweises.

§. 3. Lehrsatz.

Wenn drey ungleiche Perpendikel auf eine gerade Linie errichtet werden, so liegen ihre Endpuncte in gerader Linie.

Beweis.

Es treten hier mehrere Fälle ein. Ich werde aber nur von jenen sprechen, welche zu meinem Zwecke dienen.

Erster Fall. Der erste Perpendikel sey AD (Fig. 2.) und der dritte CF, jeder größer als BH, der zwischen beyden genommen wird. Man mache AK = BH = CL, und verbinde KHL, so wird diese eine gerade Linie seyn. (§. 1.). Weil nun AD > AK, und CF > CL, so sind die Puncte D und F nicht in der geraden DHL; folglich liegen auch die drey Puncte D, H, F nicht in gerader Linie.

Zweyter Fall. Es sey der erste Perpendikel AD > BH, und der dritte CL = BH. Man mache AK = BH = CL, und verbinde KHL, so wird diese eine gerade Linie seyn (§. 1.). Wenn aber AD > AK ist, so liegt der Punct D über der geraden KHL; folglich die drey Puncte D, H, L nicht in gerader Linie.

Drit-

Driter Fall. Der erste Perpendikel AD (Fig. 3.) sey kleiner als der zweyte, und der zweyte dem dritten gleich. Man verlängere AD, mache DG = BE = CF und verbinde GBC, so wird GBC eine gerade Linie seyn (§. 1.). Da nun A unter dem Puncte G liegt, so liegt A nicht in der geraden Linie GBC; folglich befinden sich die drey Puncte A, B und C nicht in gerader Linie.

Vierter Fall. Es sey der erste Perpendikel AD (Fig. 4. und 5.) und der dritte CF, jeder kleiner als der zweyte BE. Hier sind die Perpendikel AD und CF entweder gleich oder ungleich. Sind sie gleich, so mache man EG = AD = CF und verbinde AGC, so wird diese gerade seyn; und weil der Punct B über der Linie AGC liegt, so sind die Puncte A, B, C nicht in gerader Linie. Sind die Perpendikel ungleich, so sey AD > CF. Man verlängere CF und mache FH = AD = GE, und verbinde AGH, so ist diese wieder eine gerade Linie; und weil der Punct B über, der Punct C unter der geraden Linie AGH liegt, so befinden sich die drey Puncte A, B, C nicht in gerader Linie.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn zwey Linien AB, CD (Fig. 6.) von einer dritten AC dergestalt geschnitten werden, daß ∢ CAB = R und ACD < R, und wenn man aus

willkührlichen Puncten der Linie CD Perpendikel wie MN, PQ, u. s. w. auf die gerade AB fällt, so ist jeder derselben kleiner als AC, und jeder folgende PQ kleiner als der vorhergehende MN.

Beweis.

Man ziehe aus A den Perpendikel AE auf CD, und aus E die senkrechte Linie EF auf AB. Hier fällt der Punct M entweder zwischen C und E, oder in E selbst, oder rechts von E. Für die beyden ersten Fälle ist der Beweis leicht zu geben *). Liegt aber der Punct M rechts von E, so befinden sich die drey Puncte C, E, M in der geraden Linie CD. Da nun AC > FE, so kann der Perpendikel MN nicht größer und nicht gleich seyn der EF; denn wenn dieses wäre, so lägen die drey Puncte C, E, M nicht in der geraden CD (§. 3. Fall I. und II.). Es muß also MN < EF und um so mehr noch MN < AC seyn.

Eben dieses gilt von dem Perpendikel PQ, und wenn schon MN < AC ist, so folgt für PQ = MN oder PQ > MN, daß die drey Puncte C, M, P nicht in der geraden Linie CD lägen. Daher muß PQ < MN seyn.

§. 5.

*) Man sehe den letzten Abschnitt No. 23. dieser Schrift.

§. 5. Lehrsatz.

Wenn man auf die gerade Linie AD (Fig. 7.) den Perpendikel BF errichtet, und durch den Punct F eine gerade Linie FM unter einem stumpfen Winkel BFM zieht, so wird jeder Perpendikel, welchen man aus einem Puncte der FM auf die AD zieht, größer als BF seyn.

Beweis.

Wenn man die MF gegen E verlängert, so sind die Puncte H, G, F, E in einer geraden Linie EM. Da nun ∢ BFM > R, so ist ∢ BFE < R, und weil ∢ FBD = R, so ist auch ∢ FBA = R. Folglich muß jeder Perpendikel wie EA kleiner als FB seyn (§. 2.). Fällt man nun von dem nach Belieben genommenen Puncte G den Perpendikel GC auf AD, so kann derselbe nicht in B fallen, weil es sonst aus B zwey senkrechte Linien in der nämlichen Ebene gäbe. Eben so wenig kann dieser Perpendikel in die Verlängerung von BD, z. B. in P fallen, weil hier das Dreyeck POB bey P und B zwey rechte Winkel hätte. Daher fällt diese senkrechte Linie recht von B, und z. B. in C. Da nun ∢ GCD = R, so kann der folgende Perpendikel HK weder in C noch auf die Verlängerung von DC gegen A eintreffen. Daher entfernen sich die Puncte C, K u. s. f. immer mehr und mehr vom Puncte B.

Nimmt man nun GC = FB, so werden, weil AE < FB, die drey Puncte E, F, G nicht in einer geraden Linie liegen (§. 3. Fall III.), welches gegen die Voraussetzung ist. Wäre GC < FB, so würde, weil AE < FB ist, der Perpendikel FB der größte unter den beyden andern AE, GC seyn, und die Puncte E, F, G lägen nicht in einer geraden Linie (§. 3. Fall IV.).

Da nun der Perpendikel GC weder gleich noch kleiner ist, als FB, so muß er nothwendig größer als FB seyn. Auf ähnliche Art läßt sich beweisen, daß der Perpendikel HK > FB sey, und so ferner.

Anmerkung. Hierdurch ist nun wohl bewiesen, daß jeder Perpendikel von einem Puncte der FM auf BD größer als FB sey; allein man weiß noch nicht, daß jedes folgende Loth auch größer als das vorhergehende sey, welches in der Folge gezeigt werden soll.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn die gleichen Linien AB, IK (Fig. 1.) auf BD senkrecht stehen, und man zieht durch I und K die gerade Linie IK, so bildet diese mit AB und IK in A und I rechte Winkel.

Beweis.

Wenn der Winkel A kein rechter ist, so muß er entweder spitz oder stumpf seyn. Wäre er spitz, so

so würde der Perpendikel IK < AB seyn (§. 4.), und sollte er stumpf seyn, so wäre IK > AB (§. 5.). Allein nach der Annahme war AB = IK; folglich kann der ∢ A weder spitz noch stumpf seyn und ist folglich ein rechter. Da nun eben dieses von dem ∢ I gilt, so ist der Satz bewiesen.

§. 7. Lehrsatz.

Wenn man auf die gerade AC (Fig. 8.) die Perpendikel AB < EG errichtet, und die gerade BG zieht, so wird ∢ ABG > R, und ∢ EGB < R seyn.

Beweis.

Man mache EF = AB und ziehe BF, so muß ∢ ABF ein rechter seyn (§. 6.). Da man nun GE > AB oder > FE nimmt, so befindet sich der Punct G über dem Puncte F; also ist I) ∢ ABG > ∢ ABF, d. h. ∢ ABG > R.

Da AB = EF, so ist ∢ BFE = R (§. 6.); folglich ist der Winkel BFG auch ein rechter, das Dreyeck BGF rechtwinklich und der Winkel BGE ein spitzer. Also ist II) der Winkel BGE, der von dem größten Perpendikel und der geraden BG gebildet wird, kleiner als ein rechter Winkel.

Zusatz. Wenn man (§. 5.) bewiesen hat, daß alle Perpendikel von Puncten der FM, (Fig.

(Fig. 7.) auf BD größer als BF sind, so läßt sich nun darthun, daß jedes folgende Loth größer als das vorhergehende sey. Nun hat man GC > BF (§. 5.), folglich ist Winkel FGC spitz (§. 7.). Daher muß ∢ CGH stumpf und HK > GC seyn. Auf ähnliche Art läßt sich der Beweis für die folgenden Perpendikel fortsetzen.

§. 8. Lehrsatz.

Wenn man von dem einen Schenkel eines spitzen Winkels BAC, (Fig. 9.), aus den Puncten D, F, u. s. f. senkrechte Linien auf den andern Schenkel zieht, so wird jeder folgende Perpendikel größer als der vorhergehende seyn.

Beweis.

Man ziehe von einem willkührlichen Puncte D auf AC den Perpendikel DE, so kann derselbe weder in A, noch links von A z. B. in H eintreffen. Daher fällt die senkrechte Linie rechts von A, und man hat das rechtwinkliche Dreyeck AED, worin der Winkel AD ein spitzer, und folglich der Winkel EDF ein stumpfer ist. Daher ist nun FG > DE (§. 5.); ingleichen IK > FG (§. 7. Zus.), und so von den folgenden.

Zusatz I. Da die Perpendikel von A nach B immer wachsen, so müssen sie von B gegen A immer abnehmen, weil sie auch in dem Scheitelpuncte

puncte A gleich Null werden. Eine Linie aber, welche bis Nichts abnimmt, muß kleiner werden, als jede angegebene Linie. Folglich wird IK in dieser Abnahme = $\frac{1}{2}$ IK; $\frac{1}{4}$ IK; $\frac{1}{8}$ IK; $\frac{1}{16}$ IK u. s. f. Nun sey DE = $\frac{1}{16}$ IK, so ist auch umgekehrt wahr, daß diese Linie DE, nachdem sie die Größe von IK erreicht hat, nach dem Gesetze $\frac{1}{16}$ IK, $\frac{1}{8}$ IK, $\frac{1}{4}$ IK, $\frac{1}{2}$ IK, IK u. s. w. wachsen müsse. Man kann aber den Schenkel des Winkels BAC ins Unendliche verlängern und den Punct D in einer beliebigen Entfernung von A nehmen. Folglich wird man auf Perpendikel kommen, welche sich wie die Zahlen 2, 4, 8, 16.... verhalten.

Zusatz II. Auch folgt hieraus, daß man auf senkrechte Linien kommen müsse, welche größer sind als jeder angegebene Perpendikel.

So weit gehen die Vordersätze des Kircher'schen Systems. In der darauf folgenden Theorie legt er zuerst die Euclidische Erklärung der Parallellinien zum Grunde, zeigt nun hierauf durch den bekannten Lehrsatz, unter welchen Bedingungen solche Parallelen möglich sind und stellt hierauf folgenden Satz auf.

§. 9. Lehrsatz.

Wenn zwey Linien AC und BD (Fig. 1.) auf einer dritten AB senkrecht stehen, so sind I) alle Perpendikel aus Pun-

Puncten E, G, I der einen auf die andere BD dem Lothe AB gleich; II) wenn der Perpendikel EF dem Perpendikel AB gleich ist, so liegt der Punct E in der Linie AC.

Beweis.

I. Wäre einer dieser Perpendikel größer oder kleiner als AB, so würde der Winkel BAC stumpf oder spitz seyn. (§. 7.). Nun ist aber Winkel BAC = R; folglich sind die Perpendikel EF, GH, IK u. s. f. weder größer noch kleiner als AB; folglich sind sie gleich AB.

II. Wenn der Perpendikel EF = AB ist, und der Punct E läge nicht in der Linie AC, so müßte dieser Punct entweder unter oder über E fallen. Gesetzt er falle in M. Man ziehe AM, so wird ∢ BAM, weil AB = FM ist, = R seyn (§. 8.). Nun ist aber ∢ BAC = R nach der Construction, folglich hätte man aus A auf AB zwey Perpendikel, welches unmöglich ist. Eben so wird bewiesen, daß der Punct E nicht über AC fallen könne.

§. 10. Lehrsatz.

Wenn zwey Linien AB und CB, (Fig. 10.) von einer dritten AC dergestalt geschnitten werden, daß ∢ CAB = R, und ∢ ACP < R, so muß die Linie CP die AB auf der Seite des spitzen Winkels ACP schneiden.

Be-

Beweis.

Da $\measuredangle$ ACP < R, so läßt sich aus C ein Perpendikel CF errichten. Dieser ist parallel mit AB und $\measuredangle$ FCP < R. Daher werden die Perpendikel aus den Puncten N, P der Linie CP auf die CF immer größer (§. 8.) und es giebt einen unter ihnen, der dem gegebenen AC gleich ist. (§. 8. Zus. II.). Dieser sey QR, so liegt der Punct R in der Linie AB (§. 9.), und der folgende Perpendikel ST, der größer als QR ist, muß seinen Punct T unter AB haben. Aber eine gerade Linie, von welcher sich zwey Puncte zu verschiedenen Seiten einer andern geraden, welche mit ihr in einerley Ebene liegt, befinden, muß diese nothwendig durchschneiden. Folglich muß auch die Linie CD, welche den Punct C über, und den Punct T unter der geraden Linie AB hat, diese gerade AB nothwendig durchschneiden.

In dem folgenden Lehrsatze beweiset der Verfasser, daß die beyden geraden Linien zusammenlaufen müssen, wenn die Summe der innern Winkel weniger als zwey rechte beträgt. Ich übergehe hier diesen Beweis, nebst den noch folgenden Sätzen der Parallelen, weil das Bisherige hinreichend ist, über den Werth der Kircherschen Theorie ein entscheidendes Urtheil zu fällen.

Prü-

Prüfung dieser Theorie.

Bey einer aufmerksamen Erwägung der ersten Gründe dieses Systems fällt es sogleich in die Augen, daß die Behauptung des ersten Lehrsatzes der Gesichtspunct sey, aus welchem die Entscheidung über den Werth oder Unwerth aller folgenden Sätze ausgehen muß. Fehlt es diesem Satze an den Erfordernissen eines evidenten Beweises, so kann auch dieses System, so consequent es übrigens in seiner fernern Ausführung seyn mag, auf eine vollkommne Berichtigung der Parallelen keinen gegründeten Anspruch machen.

So wenig man nun gegen den ersten Theil jenes Lehrsatzes, daß nämlich durch die Bewegung des Perpendikels AB, (Fig. 1.) von B nach D der Punct A eine Linie beschreibe, welche überall gleichen Abstand von der geraden BD hat, eine gegründete Einwendung vorbringen kann: eben so wenig ist der zweyte Theil dieses Lehrsatzes, daß nämlich die beschriebene Linie auch eine gerade seyn müsse, mit der erforderlichen geometrischen Strenge erwiesen. Es ist zwar keineswegs zu läugnen, daß eine Linie, von welcher sich beweisen läßt, daß sich drey beliebige Puncte immer in gerader Linie befinden müssen, selbst eine gerade Linie seyn werde; allein daß dieses wirklich bey der durch die Bewegung des Perpendikels AB beschriebenen Linie AC der Fall sey, hat der Verfasser nur durch einen fehlerhaften Cirkel bewie-

sen. Die Stärke seines Schlusses beruht darauf: Wenn irgend drey Puncte der beschriebenen Linie AC nicht in gerader Linie liegen, so lassen sich durch jede zwey dieser drey Puncte drey gerade Linien denken, welche ein Dreyeck bilden. In diesem Dreyecke muß nun der mittlere Scheitelpunct einen andern Abstand von der geraden BD haben, als jeder der andern Scheitelpuncte. Er muß aber nach der Entstehung der erzeugten Linie doch die nämliche Entfernung von der BD haben. Folglich können diese drey Puncte kein Dreyeck bilden, und folglich muß AC eine gerade Linie seyn.

Dieser Schluß wäre allerdings bindend, wenn dessen Untersatz dargethan werden könnte. Allein wo ist hier der Beweis? Die Behauptung, daß der mittlere Winkelpunct des Dreyecks eine andere Entfernung von BD haben müsse, als die beyden äußern, folgt gar nicht aus der Construction der Linien und ist also eine willkührliche und nur fingirte Annahme. Daß übrigens der Verfasser dieser Theorie alles mit Evidenz beweisen und nichts ohne geometrische Ueberzeugung für strenge Wahrheit ausgeben wollte, erhellet aus seiner Vorerinnerung Seite VIII, wo es heißt: „In allen Anfangsgründen der Geometrie, welche bis jetzt erschienen sind, findet man keinen überzeugenden Beweis (a priori) von dem Satze: Wenn eine gerade Linie von einer andern in zwey Puncten ungleich entfernt ist, so haben auch alle Zwischen-

puncte

puncte eine ungleiche Entfernung von dieser Linie. Eben dies gilt von dem Satze: Wenn man auf eine gerade Linie in zwey Puncten zwey gleiche Perpendikel errichtet, dieselben durch eine gerade Linie verbindet, und aus Puncten von dieser senkrechten Linie auf die andere zieht, so werden alle diese unter sich gleich seyn."

„Es ist unläugbar, daß die drey Scheitelpuncte eines Dreyecks nicht in einer geraden Linie liegen, und daß sie ungleich von einer geraden Linie entfernt sind, welche man in der nämlichen Ebene zieht, worin sich das Dreyeck befindet. Denn wenn man die Grundlinie des Dreyecks auf die gerade Linie legt, so ist ihre Entfernung an den Endpuncten von der angenommenen geraden Linie = o. Da sich aber die Spitze immer über der Grundlinie befindet, so muß dieselbe von der Grundlinie oder der geraden Linie immer irgend einen Abstand haben. Es ist auch umgekehrt wahr, daß drey Puncte, welche von einer geraden Linie gleichweit entfernt sind, selbst geradlinigt liegen; denn lägen sie nicht so, so würden sie die Spitzen eines Dreyecks bilden, welche ungleiche Entfernung von der geraden Linie haben müssen."

Wie wenig überzeugend alle diese Gründe seyen, wird aus einer etwas genauern Betrachtung derselben erhellen. Man denke sich das Dreyeck DGF, (Fig. 2.), so kann man wohl mit

mit voller Evidenz annehmen, daß der Punct G weiter von der Grundlinie entfernt sey als D und F, weil der Abstand von D und F = o ist. Allein, sobald davon die Anwendung auf die Entfernung der Puncte D, G und F von der geraden MN gemacht werden soll, sobald dreht man sich in einem beständigen Cirkel umher. Man setze, der Perpendikel DA bewege sich von A nach C und der Punct D beschreibe hierdurch eine Linie, von welcher noch nicht entschieden ist, ob sie eine gerade oder eine krumme sey. Zieht man hier von D nach F die gerade DF, so kann die durch den Perpendikel DA erzeugte Linie, wenn sie keine gerade wäre, entweder über oder unter diese DF fallen. In jenem Falle könnte sie z. B. durch den Punct G, in diesem durch H gehen. Zieht man nun aus D und F nach G und H die geraden Linien DG, FG, und DH, FH, so entstehen zwey Dreyecke DGF und DHF. In jenem Dreyecke ist der Punct G von der Grundlinie DF in einiger Entfernung. Läßt sich aber daraus auch unmittelbar einsehen, daß eine senkrechte Linie GEB aus G auf MN größer sey, als der Perpendikel DA? Gewiß nicht; denn man müßte zuvor bewiesen haben, daß das Stück EB nicht < DA seyn könne, welches doch gar nicht dargethan worden ist, und sogar nicht als bewiesen angenommen werden kann, da man erst den g l e i c h e n A b s t a n d aller Puncte der geraden DF von der MN als eine Folge daraus ableitet. Diese Bemerkung kann auf ähnliche Art auf das zweyte Dreyeck DHF angewendet werden,

den, und es erhellet zur Genüge hieraus, daß die Darstellung des Verfassers den strengen Forderungen einer geometrischen Demonstration nicht entspreche.

Wollte man nun auch dem Beweise dieses Lehrsatzes (§. 2.) den Rang einer befriedigenden Darstellung einräumen, so könnte die Kircher'sche Theorie demungeachtet nicht als eine vollkommene Berichtigung der Parallel-Theorie aufgestellt werden, da einer ihrer folgenden Sätze ebenfalls ganz beweislos dasteht, obgleich er durch eine richtige Anwendung jenes Lehrsatzes (in §. 2.) sehr streng hätte bewiesen werden können. Der Verfasser beweiset (§. 8.) daß jeder folgende Perpendikel welcher von einem Puncte des Schenkels AB, (Fig. 9.) im ∠ BAC auf dessen andern Schenkel gefällt wird, größer als der vorhergehende sey, und will daraus in dem zweyten Zusatze die Folge ableiten, daß die Perpendikel, welche aus Puncten der AB auf AC gefällt werden können, nothwendiger Weise einmal größer werden müssen, als jede gegebene gerade Linie. Diese Folge geht aber offenbar weiter, als die Behauptung des Lehrsatzes. Wenn es gleich streng erwiesen ist, daß es zwischen IK und dem Scheitelpuncte A Perpendikel geben müsse, welche nach dem Gesetze der Zahl 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ .... abnehmen: so weiß man hierdurch nichts mehr, als daß es zwischen A und I senkrechte Linien gebe, welche nach der Progression $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1 bis zum Perpendikel IK zunehmen. Daß aber auch alle folgen-

gende senkrechte Linien aus Puncten der verlängerten IB auf AC nach dem ähnlichen Gesetze: 2 IK, 4 IK, 8 IK..... zunehmen werden, ist hierdurch bey weitem noch nicht dargethan, und nichts als ein Schluß, der sich lediglich auf die Analogie gründet, welche nie die Stelle eines Beweises vertreten kann. Da sich nun zum Theil auf diesen Satz die Darstellung des Hauptsatzes (in §. 10.) gründet, so muß wohl auch diesem letzten die nöthige Schärfe gebrechen.

Daß übrigens die Behauptung: die Schenkel eines gegebenen spitzen Winkels entfernen sich immer mehr und mehr von einander, so daß dieser Abstand einmal die Größe einer jeden angegebenen Linie übersteigt, auch ohne Beyhülfe der Parallel-Theorie streng bewiesen werden könne, zeigte ich bey der Darstellung meiner Theorie im letzten Abschnitte dieser Schrift, wohin ich meine Leser verweise.

Ich schließe diese Critik mit der Bemerkung, daß auch Kircher das Ziel, nach welchem schon so viele eiferten, durch seine Theorie nicht erreicht habe.

Zwölfter Abschnitt.

Die Theorie

von

Georg Gottlieb Schmidt.*)

Der Verfasser dieser Theorie giebt §. 17. von dem Parallelismus der geraden Linien folgende

Erklärung

Zwey gerade Linien, welche in einer Ebene liegen, und einander nicht schneiden, wenn sie auch beyde ins Unendliche verlängert werden, heißen Parallellinien oder gleichlaufende Linien.

Auf

*) Anfangsgründe der Mathematik, von G. G. Schmidt, Professor der Mathematik zu Gießen. I. Theil. Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Buchstabenrechenkunst. Frankfurt am Mayn. 1797. S. 131. u. f.

Auf diesen Begriff des Gleichlaufens der Linien folgt nun §. 30. die eigene Darstellung seines Systems. Nämlich:

Satz.

Zwey gerade Linien, welche sich in einer Ebene befinden, schneiden einander oder sind parallel.

Dieser Satz fließt als Grundsatz aus dem Begriff der geraden Linie. Folgendes wird dazu dienen, ihn zu erläutern: ab, cd, (Tab. VI. Fig. 11.) seyen zwey parallele Linien. Man schneide sie durch eine dritte gerade Linie ef, ich behaupte, die beyden parallelen Linien haben gegen die dritte sie schneidende einerley Lage. Man schiebe die Linie ab so nach cd hin, daß der Winkel eab, welchen ab mit der Linie ef macht, immer derselbe bleibt, so wird ab mit cd parallel bleiben, und ihr immer näher rücken, denn die Lage von ac hat sich durch dieses Verschieben nicht geändert. ab kann auf diese Weise so nahe an cd rücken, bis es ganz mit ihr zusammenfällt, alsdann fällt der Winkel eab auf den Winkel acd, beyde decken einander und sind gleich. Daher haben die Linien ab, cd gegen ef einerley Lage.

Sollen zwey gerade Linien gegen eine dritte sie gemeinschaftlich schneidende verschiedene Lage haben, so müssen die Winkel, welche sie mit dieser dritten Linie nach einer Gegend hin machen, ver-

schiedene seyn. Hier finden zwey Fälle statt. Entweder ist der äußere Winkel eaB größer als der innere gegenüberstehende ecd, oder er ist kleiner. Ich behaupte, im ersten Fall schneiden sich die beyden Linien aB, cd auf der Seite von ef, auf welcher die vorhingenannten Winkel liegen, im andern Fall auf der entgegengesetzten Seite. Denn man schiebe die Linie aB so an ef herunter, daß der Winkel eaB unverändert bleibt, so erhellet, daß, wenn der Punct a in die Stelle c gekommen ist, die ganze Linie aB unterhalb cd in cD fallen muß, weil der Winkel ecD = = ∢ eaB > ∢ ecd. Nun lag aber vorher ein Theil der Linie AB über cd, folglich muß dieser Theil, indem aB nach cD rückte, nach und nach durch cd gehoben worden seyn, d. i. aB und cd müssen sich irgendwo in g geschnitten haben, und dieser Durchschnittspunct g muß nach c zugerückt seyn, indem aB sich der Lage cD näherte. Die Behauptung für den andern Fall fließet aus dem ersten. Denn es sey, (Fig. 2.) der äußere Winkel eab < ∢ ecd, so ist auf der entgegengesetzten Seite von ef der äußere Winkel eag größer als der innere gegenüberstehende ecg, weil

$$2R - \sphericalangle eab = \sphericalangle eag$$
$$2R - \sphericalangle ecd = \sphericalangle ecg; \text{ aber}$$
$$\sphericalangle eab < \sphericalangle ecd, \text{ folglich}$$
$$\sphericalangle eag > \sphericalangle ecg.$$

Es liegt also vermöge des ersten Falls der Durchschnittspunct g der beyden Linien ab, cd auf der Seite von ef, welche den Winkeln eab, ecd entgegengesetzt ist. Da zwey gerade Linien ab, cd gegen eine dritte schneidende ef einerley, oder verschiedene Lage haben müssen, und im ersten Fall der Parallelismus, in dem andern ein Schneiden statt findet, so fließet hieraus der obenstehende Grundsatz.

Prüfung dieser Theorie.

„Die Geometrie würde kein Vorbild der vollkommensten Lehrart bleiben, wenn man sich verstatten wollte, Sätze, deren Wahrheit nicht augenscheinlich ist, in ihr unbewiesen anzunehmen;“ sagt Kästner sehr richtig in der Vorrede zur ersten Auflage seiner Anfangsgründe. Diese Bemerkung gilt nicht ausschließlich von den eigentlichen Lehrsätzen der Geometrie, sondern auch von solchen Erklärungen, welche eine geometrische Behauptung ausdrücken. Die Definition der Parallelen gehört hier besonders in diese Classe. Man mag sich unter diesen Linien entweder solche vorstellen, welche in allen Puncten gleichen Abstand von einander haben, oder man mag sie als Linien betrachten, welche bey jeder Verlängerung zu beyden Seiten sich niemals durch-

schneiden, so ist man in keinem Falle des Beweises über die Möglichkeit solcher Linien entledigt. Wer also die eine oder die andere Erklärung der Parallelen zum Grunde legt, muß jedesmal darthun, unter welchen Umständen zwey Linien entweder überall gleichen Abstand haben, oder sich in ihrer Verlängerung niemals durchschneiden werden. Unterläßt man dieses, so bleibt eine Lücke in dem Vortrage, weil es schlechterdings nicht für sich evident ist, daß es dergleichen Linien wirklich geben werde.

Wirft man nun einen Blick auf die vorliegende Theorie, so ergiebt es sich sogleich, daß sich ihr Verfasser diesen Verstoß gegen die geometrische Methode wirklich zu Schulden kommen läßt. Er beginnt seine Geometrie mit Erklärungen und Grundsätzen, und stellt §. 17. die Euclidische Definition der Parallellinien auf. In dieser Ordnung folgt er vielen Geometern, welche die Erklärungen der geometrischen Vorbegriffe von den Sätzen selbst absondern. Wenn er aber §. 30. den Satz aufstellt: Zwey gerade Linien, welche sich in einer Ebene befinden, schneiden entweder einander, oder sind parallel, und nun zur Erläuterung desselben weiter sagt: ab und cd (Fig. 1.) seyen zwey parallele Linien, so muß hier der Anfänger auf Treu und Glauben annehmen, daß diese Linien ab und cd wirklich die Eigenschaft besitzen, sich auf keiner Seite je einmal zu durchschneiden. Ist dieser Anfänger des geometrischen Studiums ge-

gewöhnt, schärfer zu denken, so muß er sich wohl selbst die Frage aufwerfen: was für Bedingnisse müssen denn hier vorhanden seyn, daß a b und c d diese Eigenschaft haben? oder aus welchem Grunde erhellet die Möglichkeit solcher Linien? Wenn ein Sceptiker aufträte und behauptete, diese Linien a b und c d würden doch einmal bey ihrer Verlängerung zusammlaufen müßen, so könnte man diesem Einwurf aus der bloßen Erklärung nicht widerlegen. Es wäre also hier zu wünschen, daß der Verfasser vor dem §. 30, durch den bekannten Lehrsatz, die Bedingnisse gezeigt hatte, unter welchen die Linien a b und c d sich nicht durchschneiden können, d. h. parallel laufen müssen.

Diese Unvollständigkeit in dem Vortrage des Verfassers wird noch fühlbarer, wenn er sogleich in der Folge sagt: „Man schneide sie (die a b und c d) durch eine gerade Linie e f; ich behaupte, die beyden parallelen Linien haben gegen die dritte sie schneidende Linie einerley Lage.“ Da man hier von den beyden Parallelen a b und c d gar nichts weiß, als daß sie sich, zu beyden Seiten verlängert, nie schneiden werden, so ist nicht einzusehen, wie man daraus auf die Gleichheit der Winkel e a b und a c d schließen kann. Die Gleichheit dieser Winkel setzt vielmehr schon die vollkommne Berichtigung der Parallel-Theorie zum voraus. Denn wenn man durch die Parallelen a b und c d eine gerade Linie e f nach Belieben legt, und nun zeigen will, daß ∠ e a b

=

= ∢ acd sey, so muß schon zuvor bewiesen seyn, daß diese Linien, wenn die Winkel ungleich sind, sich nothwendig durchschneiden müssen. Eben darin liegt ja bekanntermaßen die Schwierigkeit dieser Theorie, daß es noch nicht mit Evidenz dargethan werden kann, ob es durch den Punct a mit der cd nur Eine einzige Parallellinie gebe, oder, ob man ausser der ab noch eine andere mit cd gleichlaufende ziehen könne. Setzt man ∢ eab = ∢ acd, so ist es erwiesen, daß ab und cd nie zusammentreffen können. Legt man aber an den Punct a einen Winkel, der größer oder kleiner als acd ist, so bleibt immer noch unentschieden, ob diese neue Linie nicht auch mit ab in Absicht des Zusammentreffens mit cd gleiche Eigenschaft haben werde.

Wollte man nun auch diese Unvollständigkeit in dem vorliegenden Systeme, die allerdings sehr leicht zu verbessern ist, hier übergehen, so ist die fernere Darstellung desselben doch so wenig streng befriedigend, als es die Theorie von Kästner ist, womit sie beynahe vollkommen übereinstimmt. Wenn man nämlich ∢ eaB > ∢ ecd setzt, so ist wohl klar, daß der Schenkel aB, bey dem Herunterbewegen des Scheitelpuncts a nach c, mit seiner ganzen Länge durch cd gegangen sey, und daß nun cD ganz unterhalb der cd liegen müsse; allein daraus folgt immer noch nicht, daß der Schenkel aB in der Lage, welche er in dem Puncte a hat, auch schon diese cd schneiden müsse. Denn es ist doch offenbar nicht evident,

daß

daß wenn die Linie cae immer mehr und mehr verlängert wird, und der Schenkel aB sich unter dem bleibenden ∢ caB immer mehr und mehr von c entfernt, man auch nun noch behaupten müsse, dieser verlängerte Schenkel werde die untere Linie cd immer noch durchschneiden. Um hier unnütze Wiederhohlungen zu vermeiden, verweise ich auf die Prüfung der Kästner'schen Theorie, wo diese Betrachtungen weiter ausgeführt sind, und die Unzulänglichkeit dieser Darstellungsweise umständlicher erwogen wird.

Dreyzehnter Abschnitt.

Die Theorie
von
A. M. Legendre.

I.

Aeltere Theorie. *)

Der Verfasser nimmt bey Darstellung dieser Theorie folgenden Gang.

§. 1. Erklärung.

Wenn zwey gerade Linien dergestalt in einerley Ebene liegen, daß sie nie zusammenstoßen, so weit

*) Elémens de Géométrie avec des notes; par *Adrien Marie Le Gendre*; à Paris chez Firmin Didot. (An II. de. l. Rep.). 1794. Diese Theorie wird hier nach L. W. Gilbert's Werke: die Geometrie nach Legendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentis und den Alten, vorgetragen.

weit man sie auch verlängert, so sind sie **gleichlaufend** oder **parallel**.

§. 2. Lehrsatz.

Zwey gerade Linien AC, BD (Tab. VII. Fig. 1.) **welche auf einer dritten AB senkrecht stehen, sind parallel.**

Beweis.

Gesetzt sie träfen in irgend einem Puncte O zusammen, so gäbe es von diesem Puncte zwey Perpendikel OA, OB auf dieselbe Linie AB, welches unmöglich ist.

§. 3. Lehrsatz.

Wenn auf der geraden Linie AB eine andere BD senkrecht (Fig. 2.) **und eine zweyte AC schief steht, so daß der spitze Winkel BAC nach der Seite jenes Perpendikels zu liegt: so müssen BD, AC, genugsam verlängert** (auf der Seite der AB, an welcher der spitze Winkel liegt) **zusammentreffen.**

Beweis.

Aus verschiedenen Puncten F, I, L der schiefen Linie AC fälle man auf AB die Lothe FG,

FG, IH, LM, so müssen diese Perpendikel auf die Seite fallen, wo der spitze Winkel liegt, d. h. gegen BD zu. Die Puncte G, H, M, in welchen sie auf die AB auftreffen, können nicht mit A zusammenfallen, weil $\measuredangle$ BAC < R. Eben so wenig können sie in der entgegengesetzten Verlängerung der Linie AB liegen. Denn sonst müßte das im Puncte A auf AB errichtete Perpendikel AE von diesen Perpendikeln durchschnitten werden (wie z. B. von FN in O) und dann wären von dem Durchschnittspuncte O zwey verschiedene Perpendikel auf AL vorhanden, nämlich ON und OA, welches unmöglich ist. Daher müssen die Puncte G, H, M in der Linie AB von A nach B zu liegen.

Aus denselben Gründen muß, wenn AI > AF, auch der Punct H von G nach B zu in der Linie AB liegen. Denn sollte er mit G zusammenfallen, so stånden in G auf AB zwey verschiedene gerade Linien GF, GI senkrecht, welches unmöglich ist. Sollte er auf die entgegengesetzte Seite der AB fallen, so würde das Perpendikel aus I das Perpendikel FG durchschneiden, und aus einem Puncte außerhalb der AB auf ihr zwey verschiedene Perpendikel vorhanden seyn, welches eben so wenig möglich ist. Folglich muß der Punct H von G nach B zu fallen, so daß AH größer ist als AG.

Wenn man also auf AC immer in größern Entfernungen Puncte nimmt, und aus ihnen senk-

senkrechte Linien auf A B zieht, so fällt der Punct, wo sie auf A B eintreffen, immer weiter und und weiter von A ab. In diesem Wachsthum der Entfernungen A G, A H, A M Grenzen annehmen zu wollen, würde ungereimt seyn. Denn gesetzt man wollte behaupten irgend eine der senkrechten Linien, z. B. I H, sey die letzte, folglich die, deren Punct H am weitesten von A abstände, so ließe sich allemal, auf die Art, wie es hier geschehen ist, darthun, daß, wenn man die A B verlängert, ein aus irgend einem Puncte L auf A B gefälltes Perpendikel L M dergestallt auf A B aufstehen müßte, daß die Entfernung A M größer wäre als A H; ein Resultat, welches der Annahme, daß I H die letzte am weitesten von A entfernte senkrechte Linie sey, widerspricht.

Folglich treffen auf A B in jeder beliebigen noch so großen Entfernung vom Puncte A solche Perpendikel, die aus einem Puncte der A C gefällt sind, ein. Daher muß auch in der Entfernung A B, ein solches Perpendikel mit der senkrechten Linie B D zusammenfallen; da in einem Puncte B einer geraden Linie nur ein einziges Perpendikel auf diese Linie möglich ist. Daher müssen die Linien A C und B D, genugsam verlängert, in irgend einem Puncte zusammentreffen, und zwar an der Seite der A B, auf welcher der spitze Winkel B H liegt.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien AC, BD, (Fig. 3.), mit einer dritten AB zwey innere Winkel CAB, und ABD, bilden, deren Summe zweyen rechten gleich ist, so sind sie parallel.

Beweis.

Aus dem Puncte G in der Mitte zwischen A und B sey senkrecht auf AC die gerade Linie EGF gezogen. Der Voraussetzung nach ist ∢ GBD + ∢ GAE = 2 R. Nun sind auch ∢ GBD + ∢ GBF = 2 R; also auch ∢ GBD + ∢ GAE = ∢ GBD + ∢ GBF; daher ∢ GAE = ∢ GBF. Außerdem sind als Scheitelwinkel AGE und BGF, und, nach der Construction, die Seiten GA, GB gleich. Folglich decken sich die beyden Dreyecke AEG und BFG, und es ist ∢ GFB = ∢ GEA. Aber nach der Construction ist ∢ GFB = R; daher auch ∢ GEA = R. Folglich stehen die beyden Linien AC und BD auf einer dritten EF senkrecht, und sind also parallel (§. 2.).

§. 5. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien AI und BD (Fig. 4.) mit einer dritten AB, zwey innere Winkel BAI und ABD bilden, deren Summe kleiner als zwey rechte Winkel ist, so treffen sie, genugsam verlängert, zusammen.

Beweis.

Man ziehe durch A die gerade Linie AC so, daß die beyden innern Winkel CAB und ABD = 2R und nehme dann dieselbe Construction an, wie bey vorigem Lehrsatze. Weil AE das Perpendikel und AK eine schiefstehende Linie auf EG ist, die beyde durch den nämlichen Punct A gehen, so ist der Winkel AKE < R, also auch ∢ FKI < R. Daher müssen KI und FD genugsam verlängert oberhalb EF zusammentreffen (§. 3.).

Zusatz 1. Dasselbe findet auch statt, wenn zwey Linien AM und BD mit der dritten AB zwey innere Winkel BAM und ABD bilden, deren Summe größer als zwey rechte ist. Denn da die Summe der Nebenwinkel BAM + BAN, und ABD + ABF = 4R, und, der Voraussetzung nach, ∢ BAM + ∢ ABD > 2R, so muß ∢ BAN + ∢ ABF < 2R seyn. Daher wird AN nach dem vorigen Beweise mit BF zusammentreffen.

Zusatz 2. Durch jeden Punct A, (Fig. 4.), ist mit einer geraden Linie BD nur eine einzige Parallele AC möglich. Denn jede von AC verschiedene gerade Linie AI oder AM, bildet mit AB einen kleinern oder größern Winkel als AC, folglich zwey innere Winkel, deren Summe kleiner oder größer als 2R, und durchschneidet also die BD.

Anmerkung. Ich übergehe hier die Darstellung der folgenden Sätze, weil sie so wie auch der 1. und 2. Zusatz des §. 5., in der neuern Theorie von Legendre beybehalten worden sind, wo sie dann im Zusammenhange vorgetragen werden sollen.

Prüfung dieser Theorie.

Es ist leicht einzusehen, daß der Beweis für Euclids eilften Grundsatz, welcher in der vorstehenden Theorie der Lehrsatz des §. 5. ist, auf der Behauptung der Lehrsätze in §. 3. und §. 4. beruhe. Damals glaubte der Verfasser noch, daß sich gegen den Beweis in §. 3. nichts anderst, als der Begriff des Unendlichen einwenden lasse. Ob es nun gleich wahr ist, daß er selbst die Unzulänglichkeit dieser Beweise gefühlt haben muß, weil er seine Theorie der Parallelen in späteren Ausgaben seines oben angeführten Werkes umänderte, so sey es mir doch hier erlaubt, eine Critik darüber mitzutheilen, welche Gilbert in der gleichfalls oben genannten Schrift dem Beweise von Legendre in einer Anmerkung beyfügte, und für den Kenner gewiß auch befriedigend ist. Ich hebe davon das Wichtigste aus. Gilbert sagt: „Dieser Beweis thut zwar überzeugend dar, daß, „falls es in der Verlängerung einer geraden Linie

„keine

„keine Grenzen giebt, es auch kein letztes „Perpendikel aus Puncten der AC auf AB „geben könne. Allein daraus folgt keines„wegs, daß in der Entfernung jener „Perpendikel vom Puncte A keine „Grenzen geben könne. Denn es wäre vielleicht „doch denkbar, daß bey gleichweit entfernten „Puncten auf der AC die Perpendikel auf AB „immer weniger von einander abständen, und „ihre Entfernungen etwa in einer geometrischen „oder andern unendlichen Reihe, die eine endliche „Summe hat, abnehmen könnten, da denn in „gewissen Entfernungen der BD die AC sich ihr „assymptotisch nähern würde, ohne sie zu errei„chen. In diesem Falle wäre zwar eine „Grenze in der Entfernung jener Perpendikel „vom Puncte A auf der Linie AB vorhanden, „über die heraus, für jede Entfernung vom A „kein Perpendikel aus einem Puncte in der AC „die AB mehr durchschnitte; allein demungeachtet „gäbe es kein letztes Perpendikel, weil es „bey allen Annäherungen ohne Ende keinen letz„ten Zustand giebt. Es scheint daher etwas „übereilt zu seyn, wenn Herr Legendre daraus „daß es kein letztes Perpendikel giebt, unmittel„bar folgert, daß in jeder noch so großen Ent„fernung von A ein Perpendikel aufstehe; eine „Folgerung, die nur dann gültig wäre, wenn er „dargethan hätte, daß es in der Entfernung der „Durchschnittspuncte der Perpendikel auf der „Linie AB, vom Puncte A an gerechnet, keine „Grenzen gäbe. So lange er uns dieses nicht „be-

„beweiset (und dieses mögte auf dem Wege, den „er einschlägt, kaum möglich seyn) können wir „seinen Beweis nicht als bindend anerkennen, „sondern müssen ihn, so viel Scharfsinn er übri„gens verräth, den nicht ganz geglückten Versu„chen, die Schwierigkeit in der Theorie der Pa„rallelen zu heben, beyzählen."

Ich gehe nun zum Beweise des Lehrsatzes in §. 4. über, und entdecke auch hier noch eine große Lücke. Es werden in diesem Satze die innern Winkel GBD und GAE (Fig. 3.) ungleich angenommen, weil, wenn beyde gleich sind, nach der Voraussetzung, daß ihre Summe zwey Rechte beträgt, jeder von ihnen ein rechter, und, nach §. 2. die Linien AC und BD parallel wären. Nun heißt es im Anfange des Beweises: Aus dem Puncte G in der Mitte zwischen A und B sey senkrecht auf AC die gerade Linie EGF gezogen. Allerdings kann man AB im G halbiren, auch aus G als einem Puncte über BD, auf diese Linie ein Perpendikel GF fallen lassen, welches, wegen der Annahme, daß der Winkel GBD größer oder kleiner als ein rechter sey, eine von AB verschiedene Lage haben muß. Auch ist leicht einzusehen, daß man dieses Perpendikel GF, rückwärts gegen E hin, ohne Ende verlängern kann. Aber aus allem dem folgt doch keines wegs, daß die also rückwärts verlängerte FG die Linie AC in irgend einem Puncte E schneiden müsse. Dies annehmen wollen, hieße den Euclidischen XI Grund-

satz

satz als solchen voraussetzen, welches doch der Verfasser eben vermeiden, und für diesen Grundsatz einen strengen Beweis finden wollte. Denn, angenommen, daß das Perpendikel GF von B gegen F fiele d. h. angenommen, daß ∢ GBD > R), so ist wegen ∢ GFB = R, der Winkel FGB < R, also auch sein Scheitelwinkel AGE. Weil nun nach der Voraussetzung ∢ GBD + ∢ EAG = 2R, und ∢ GBD > R, der Winkel GAE nothwendig spitz seyn muß, so wären die zwey Linien AE und GE so von einer dritten geschnitten, daß die innern Winkel EAG und AGE zusammen weniger, als zwey Rechte betragen. Schneiden sie aber auch einander in irgend einem Puncte E? Man wäre nun schon durch einen mächtigen Sprung auf Euclids XI Grundsatz gekommen, wenn man diese Frage mit Ja beantworten wollte. Selbst der in §. 3. vorausgeschickte Lehrsatz, wenn er auch seine volle Evidenz hätte, wäre zur Ergänzung dieses Beweises unzulänglich, weil dort bestimmt ein rechter und ein spitzer Winkel vorausgesetzt werden, um den Durchschnitt der Linien zu beweisen; hier aber beyde Winkel spitz sind.

Aus dem bisher Gesagten folgt nun, daß, da der Schnittspunct des verlängerten Lothes GF mit der AC nicht evident dargethan ist, auch die Möglichkeit des △AGE unbewiesen bleibt. Man kann also nicht mit dem Verfasser sagen, daß das △GFB das △AGE decke, und der Winkel

AEG ein rechter sey. Folglich ist denn der ganze Lehrsatz in §. 4. unbewiesen.

Sonderbar bleibt es übrigens, daß Herr Gilbert, der doch dem Beweise des Lehrsatzes in §. 3. eine so treffende und scharfsinnige Critik beyfügte, die Lücke nicht entdeckte, welche in der Darstellung dieses §. 4. herrscht.

Ich will nun zur neuern Theorie dieses vortrefflichen französischen Geometers übergehen, um zu sehen, ob er hierin glücklicher war, als in seinem ältern Versuche.

II.

Neuere Theorie *).

Diese neuere Darstellung beruht auf folgenden Sätzen:

§. 1. Lehnsatz. (Lemme).

Die Summe der drey Winkel eines Dreyecks kann nicht mehr betragen, als zwey Rechte.

Be-

*) Aus den Elémens de Géométrie avec des notes, par *A. M. LeGendre*, membre de l'institut national de France, et de la société Royale des Londres. 4ème Edition. A Paris. An X. 1802.

Beweis.

Es sey, wenn es möglich ist, ABC (Fig. 5.), ein Dreyeck, in welchem die Summe der drey Winkel größer ist als zwey rechte.

Man nehme auf der verlängerten AC die Linie CE = AC, mache den Winkel ECD = CAB, die Seite CD = AB und ziehe DE und BD. Das Dreyeck CDE wird dem Dreyecke BAC gleich und ähnlich seyn, weil zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel beyderseits gleich sind. Folglich ist auch ∢ CED = ∢ ACB, ∢ CDE = ∢ ABC und die dritte Seite ED gleich der dritten AC.

Weil nun die Linie ACE eine gerade ist, so beträgt die Summe der Winkel ACB, BCD, DCE = 2 R. Allein man nimmt an, daß die Summe der Winkel des Dreyecks ABC größer als zwey rechte sey; folglich hat man ∢ CAB + ∢ ABC + ∢ ACB > ∢ ACB + ∢ BCD + ∢ DCE. Zieht man nun auf beyden Seiten den gemeinschaftlichen Winkel ACB, und ∢ CAB = ∢ DCE ab, so bleibt ∢ ABC > ∢ BCD. Da auch die Seiten AB und BC des Dreyecks ABC, gleich sind den Seiten CD und BC im Dreyeck BCD, so folgt, daß die dritte Seite AC größer sey als BD *).

*) Man sehe hier den Nachtrag zur gegenwärtigen Theorie.

Man verlängere nun in Gedanken die AC in unbestimmter Länge, und denke sich eine Reihe gleich und ähnlicher Dreyecke ABC, CDE, EFG, GHI rc., die alle einerley Lage haben. Verbindet man nun die nächstgelegenen Spitzen B, D, F rc. dieser Dreyecke durch die geraden Linien BD, DF, FH, HK rc., so wird man zu gleicher Zeit eine Reihe Zwischendreyecke BCD, DEF, FGH rc. erhalten, die alle unter sich gleich seyn werden, weil sie alle zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gemein haben. Man hat folglich BD = DF = FH = HK rc.

Dies vorausgesetzt sey, weil AC > BD, der Unterschied AC — BD = D, so ist klar, daß 2 D der Unterschied zwischen der geraden Linie ACE = 2 AC und der geraden oder gebrochenen BDF = 2 BD seyn wird, so daß AE — BF = 2 D. Eben so wird AG — BH = 3 D; AI — BK = 4 D, und so weiter seyn.

So klein aber immer der Unterschied D seyn mag, so ist doch klar, daß dieser Unterschied hinlänglich wiederhohlt, größer werde, als jede gegebene Länge. Man wird sich demnach die Reihe der Dreyecke hinlänglich verlängert denken können, so daß man AP — BQ > 2 AB hat, woraus nun AP > BQ + 2 AB wird. Es ist aber im Gegentheile die Linie AP kürzer, als die gebrochene ABQP, welche die nämlichen Endpun-

cte

cte A und P verbindet, so daß man allezeit $AP < AB + BQ + QP$ oder $AP < BQ + 2\,AB$ hat. Die Hypothese von der man ausgieng, ist also widersprechend. Folglich kann die Summe der drey Winkel des Dreyecks ABC nicht größer als zwey rechte seyn.

§. 2. Lehrsatz.

In jedem Dreyecke ist die Summe der drey Winkel zweyen Rechten gleich.

Beweis.

Da nun schon bewiesen ist, daß die Summe der drey Winkel eines Dreyecks nicht größer seyn kann als zwey Rechte, so bleibt noch zu zeigen übrig, daß die nämliche Summe nicht kleiner als zwey Rechte ist.

Es sey ABC (Fig. 9.) das gegebene Dreyeck, und gesetzt es wäre möglich, daß die Summe seiner Winkel gleich sey $2R - Z$, in welchem Ausdrucke Z irgend eine Größe bedeutet, um welche die Summe der drey Winkel kleiner seyn soll als zwey Rechte. Ferner sey A der kleinste Winkel des Dreyecks ABC. Man nehme an der entgegengesetzten Seite BC den Winkel $BCD = \measuredangle ABC$, und $\measuredangle CBD = \measuredangle ACB$, so werden die Dreyecke BCD und ABC gleich seyn, indem sie die Seite BC gemein haben, und die

zwey

zwey daranliegenden Winkel in beyden Dreyecken gleich sind. Durch den Punct D ziehe man irgend eine gerade Linie EF, welche die zwey verlängerten Schenkel des Winkels A in E und F schneidet.

Da nun die Summe der Winkel in jedem der Dreyecke ABC und BCD = 2 R — Z ist, und sie auch in jedem der Dreyecke EBD und DCF nicht 2 R überschreiten kann (nach dem vorigen Satze), so folgt, daß die Summe der Winkel der vier Dreyecke ABC, BCD, EBD und DCF die Summe von 4 R — 2 Z + 4 R oder 8 R — 2 Z nicht übersteigen kann. Wenn man nun von dieser Summe jene der Winkel in B, C, D, welche = 6 R ist, weil die Summe der Winkel, die an jedem der Puncte B, C, D gebildet wird, 2 R beträgt, abzieht, so wird der Rest der Summe der Winkel des Dreyecks AEF gleich seyn. Folglich übersteigt die Summe der Winkel des Dreyecks AEF nicht 8 R — 2 Z — 6 R oder 2 R — 2 Z.

Muß man diesemnach zu der Summe der Winkel des Dreyecks ABC noch Z setzen, um daraus 2 R zu machen, so muß man wenigstens 2 Z zu der Summe der Winkel des △ AEF addiren, um sie gleichfalls = 2 R zu machen.

Durch Hülfe des Dreyecks DEF wird man auf ähnliche Art ein drittes Dreyeck construiren, so daß man zum wenigsten 4 Z zu der Summe sei-

seiner drey Winkel wird addiren müssen, um sie gleich 2 R zu machen. Durch Hülfe des dritten Dreyecks wird man ein viertes construiren, so daß man wenigstens 8 Z zu der Summe seiner Winkel addiren muß, um sie gleich 2 R zu machen, und so weiter.

So klein aber nun immer Z in Verhältniß des rechten Winkels R seyn mag, muß doch die Reihe Z, 2 Z, 4 Z, 8 Z ꝛc. bald zu einem Gliede führen, das gleich 2 R, oder größer als 2 R seyn wird. Man muß demnach auch auf ein solches Dreyeck kommen, dessen Winkel Summe man eine Größe = 2 R oder > 2 R setzen müßte, um dieselbe zwey Rechten gleich zu mamachen. Diese Schlußfolge ist aber offenbar widersprechend: daher findet auch die Hypothese, von der man ausgieng, hier nicht statt, d. h. es ist unmöglich, daß die Summe der drey Winkel eines Dreyecks kleiner als zwey Rechte seyn soll. Sie kann aber auch, vermöge des vorhergehenden Satzes, nicht größer seyn. Folglich beträgt diese Summe wirklich zwey rechte Winkel.

1. Zusatz.

Wenn zwey Winkel eines Dreyecks gegeben sind, oder auch nur ihre Summe, so kann man den dritten finden, indem man die Summe dieser Winkel von zwey rechten abzieht.

2. Zusatz.

Wenn in zwey Dreyecken zwey Winkel des einen einzeln gleich sind zwey Winkeln des andern, so ist auch der dritte Winkel dem dritten gleich, und die zwey Dreyecke sind unter sich gleichwinklich.

3. Zusatz.

In einem Dreyecke kann nicht mehr als Ein rechter Winkel seyn. Denn wären es solcher zwey, so müßte der dritte $= 0$ seyn. Um so mehr kann ein Dreyeck nur einen einzigen stumpfen Winkel haben.

4. Zusatz.

Im rechtwinklichen Dreyecke beträgt die Summe der zwey spitzen Winkel einen rechten.

5. Zusatz.

Im gleichseitigen Dreyecke beträgt jeder Winkel das Drittheil von zwey rechten, oder zwey Drittheile eines rechten, so, daß, wenn der rechte Winkel durch 1 ausgedrückt wird, der Winkel des gleichseitigen Dreyecks $= \frac{2}{3}$ seyn wird.

6. Zusatz.

In jedem Dreyecke B A C (Fig. 10.) wenn man die Seite C A gegen D verlängert, ist der äußere Winkel B A D gleich der Summe der beyden innern entgegengesetzten B und C; denn indem man auf beyden Seiten B A C addirt, sind die zwey Summen zweyen rechten Winkeln gleich.

§. 3. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien AC und ED (Fig. 11.), auf einer dritten AE senkrecht sind, so werden diese Linien parallel seyn, d. h. sie werden nie zusammenstoßen, so weit man sie auch auf beyden Seiten verlängert.

Beweis.

Gesetzt sie würden in irgend einem Puncte O zusammentreffen, so gäbe es zwey Perpendikel O A und O E aus demselben Puncte O auf die nämliche Linie A E, welches unmöglich ist.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien AC und BD, (Fig. 11.), mit einer dritten AB zwey innere Winkel CAB und ABD bilden, deren Summe zwey rechten

gleich ist, so sind die Linien AC und BD parallel.

Beweis.

Wenn die Winkel CAB und ABD unter sich gleich wären, so müßte jeder ein rechter seyn, und der Beweis des vorhergehenden Lehrsatzes hätte statt. Man nehme aber an, diese Winkel seyen ungleich, und fälle vom Puncte A das Loth AE auf BD.

In dem rechtwinklichen Dreyecke ABE ist die Summe der zwey spitzen Winkel ABE und BAE einem rechten gleich (§. 3. Zus. 4.). Wird diese Summe von jener der zwey Winkel ABE und BAC abgezogen, die nach der Voraussetzung zwey rechte Winkel beträgt, so bleibt der Winkel CAE gleich einem rechten. Die zwey Linien AC und BD sind demnach auf derselben Linie AE senkrecht, folglich unter sich parallel.

§. 5. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien AF und BD, (Fig. 12.), mit einer dritten AB zwey innere Winkel FAB und ABD bilden, deren Summe kleiner oder größer als zwey rechte ist, so laufen die zwey Linien AF und BD, genugsam verlängert, zusammen.

Be-

Beweis.

Man ziehe AC so, daß die Summe der Winkel CAB + ABD = 2 R, so können nun zwey Fälle statt haben, je nachdem der Winkel BAF kleiner oder größer als BAC, d. h. je nachdem die gegebene Summe FAB + ABD kleiner oder größer als 2 R ist.

Es sey I. der Winkel BAF < BAC. Zieht man durch den Punct A irgend eine schiefe Linie AM, welche die BD in M schneidet, so wird der Winkel AMB gleich ∢ MAC seyn, weil, indem man auf beyden Seiten dieselbe Größe MAB + ABM addirt, jede dieser zwey Summen zweyen rechten Winkeln gleich ist. Man mache nun MN = AM, und ziehe AN, so ist der Außenwinkel AMB des Dreyecks MAN der Summe der zwey innern entgegengesetzten MAN und ANM gleich (§. 3. Zus. 6.) Diese sind aber einander gleich wegen AM = MN; folglich ist der Winkel AMB, oder der ihm gleiche MAC doppelt so groß als MAN. Daher theilt die Linie AN den Winkel CAM in zwey gleiche Theile, und trifft die BD in einem Puncte N, der von M um die Länge MN = AM entfernt ist. Aus demselben Beweise folgt, daß, wenn man auf der Linie BD die NP = AN nimmt, ein Punct P entstehe, der so liegt, daß, wenn von A nach ihm eine gerade Linie gezogen würde, dieselbe den Winkel CAN in zwey gleiche Theile theilte. Man kann daher nach und nach die Hälf-

te,

te, das Viertheil, das Achtheil, das Sechzehntheil u. s. w. vom Winkel CAM nehmen, und die Linien, welche diese Theilung bewirken, werden die BD immer in entferntern Puncten durchschneiden, die leicht zu bestimmen sind, indem man nach und nach MN = AM; NP = AN; PQ = AP u. s. w. nimmt. Man kann noch bemerken, daß jede Entfernung eines Durchschnittpuncts vom Puncte A nicht ganz das Doppelte der Entfernung des vorhergehenden Schnitts ist. Denn AN z. B. ist kleiner als AM + AN oder als das Doppelte von AM; eben so ist AP < 2 AN; AQ < 2 AP u. s. f. Indem man aber so fortfährt, den Winkel CAM nach diesem Verhältnisse zu theilen, wird man einmal auf einen Winkel CAZ kommen, der kleiner ist, als der gegebene CAF, und es muß noch wahr seyn, daß die verlängerte AZ die BD in irgend einem bestimmten Puncte schneidet. Folglich wird um so vielmehr die Linie AF, die im Winkel BAZ liegt, die BD treffen. Wenn daher zwey Winkel BAF und ABD in ihrer Summe weniger als zwey rechte betragen, so treffen die Linien AF und BD, genugsam verlängert, zusammen.

Es sey II. die Summe der zwey Winkel FAB und ABD (Fig. 13.) größer als zwey Rechte. Man verlängere FA nach G, und DB nach E, so wird die Summe der vier Winkel FAB, BAG, ABD und ABE vier Rechten gleich seyn. Zieht man nun davon ∢ FAB + ∢ ABD > 2 R ab, so bleibt ∢ BAG + ∢

∢ ABE < 2 R; folglich müssen, nach dem ersten Falle, die Linien AG und BE, genugsam verlängert, sich einmal durchschneiden.

Anhang.

Zur Erläuterung des obigen Satzes in §. 1. trage ich hier einen Lehrsatz nach, welcher bey Euclid als der 24. Satz des ersten Buchs der Elete, nicht allgemein genug bewiesen ist, welchen aber der Verfasser in den vorhergehenden Sätzen seiner Geometrie allgemein strenge bewiesen hat. Er lautet also: Wenn zwey Seiten AB, AC, (Fig. 6.), des Dreyecks ABC gleich sind zweyen Seiten DE, DF eines andern Dreyecks DEF und zu gleicher Zeit der Winkel BAC, der von den zwey Seiten im ersten Dreyecke eingeschlossen wird, größer ist, als der von den zwey Seiten des zweyten Dreyecks eingeschlossene Winkel DEF, so wird die dritte Seite BC im ersten Dreyecke größer seyn, als die dritte EF im zweyten.

Beweis.

Man mache den ∢ CAG = D, nehme AG = DE, und ziehe CG, so wird das Dreyeck

eck GAC gleich dem Dreyecke DEF, weil nach der Zeichnung zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel in beyden gleich sind. Man hat also auch $CG = EF$. Nun können drey Fälle eintreten, je nachdem der Punct G außerhalb des Dreyecks ABC, oder auf die Seite BC, oder innerhalb dasselbe fällt.

Erster Fall.

Hier ist die gerade Linie $CG < GI + IC$ (Fig. 6.) (Euclids El. 1. B. 20. S.) eben so $AB < AI + BI$; folglich auch $CG + AB < GI + AI + IC + BI$; oder, welches dasselbe ist, $CG + AB < AG + BC$. Aber es ist $AB = AG$; folglich $CG < BC$; und, weil $CG = EF$, so ist auch $EF < BC$.

Zweiter Fall.

Fällt der Punct G (Fig. 7.) auf die Seite BC, so ist für sich klar, daß CG oder die ihm gleiche $EF < BC$ sey.

Dritter Fall.

Fällt endlich der Punct G (Fig. 8.) in die Fläche des Dreyecks ABC, so hat man $AG + CG < AB + BC$ (Euclids El. 1. B. 21. Satz), weil nun $AG = AB$, so ist auch $CG < BC$. Aber es ist $CG = EF$; folglich auch

EF

EF < BC. Euclids Beweis schränkt sich nur auf den ersten Fall dieses Lehrsatzes ein.

Prüfung dieser Theorie.

Der Werth dieser Theorie beruht auf der Darstellung des Satzes, daß die drey Winkel eines Dreyecks zusammen zwey rechte betragen. Der dafür gegebene Beweis ist indirect, indem (§. 1.) gezeigt wird, die Summe der drey Winkel des Dreyecks könne nicht größer, und auch (§. 2.) nicht kleiner als zwey Rechte seyn. Was den Beweis in §. 1. betrifft, so beruht er darauf, daß man in der arithmetischen Reihe D, 2D, 3D, 4D u. s. w. endlich auf ein Glied kommen werde, welches größer als jede gegebene Größe ist, so klein auch immer D seyn mag; ein Satz der seine volle Richtigkeit hat, weil man für ein gegebenes D immer die Anzahl der Glieder einer Reihe, deren Gesetz bekannt ist, finden kann. Das folgende Glied nach diesem letzten wird dann schon größer seyn. Aus diesem folgt denn die Möglichkeit, daß man, durch Fortsetzung der Dreyecke auf einen Unterschied AP − BQ kömmt, (Fig. 5.), der größer als 2 AB ist, woraus denn folgt daß AP > BQ + 2 AB; da aber AB = PQ, so wird auch AP > BQ + AB + PQ, oder die gerade Linie AP ist größer als die gebroche-

ne

ne ABQP, was auch immer BDMQ für Linie ist. Dieser Schluß ist aber nach des Verfassers Erklärung der geraden Linie, als der kürzeste Weg zwischen zwey Puncten, falsch; also ist es auch die Behauptung, daß die drey Winkel des Dreyecks ABC größer als zwey rechte sind.

Nicht so glücklich war der Verfasser im zweyten Theile des indirecten Beweises, worin er zeigen will daß die Summe der drey Winkel des Dreyecks ABC (Fig. 9.) nicht kleiner als zwey rechte seyn könne. Um die Wahrheit dieses Sazzes darzuthun, beschreibt er auf die Grundlinie BC ein anderes Dreyeck BCD, worin $\measuredangle$ CBD = $\measuredangle$ ACB, und $\measuredangle$ BCD = $\measuredangle$ ABC ist. Die Dreyecke ABC und CBD sind also gleich und ähnlich. Nun zieht er durch den Punct D eine gerade Linie, und nimmt an, daß dieselbe in E und F die Schenkel des Winkels A schneide, und gründet jetzt auf die Möglichkeit des Dreyecks AEF die Behauptung, daß die Summe seiner Winkel jene von 2R — 2Z nicht übersteige. Durch Hülfe des Dreyecks AEF denkt er sich ein drittes, dessen Winkel die Summe von 2R — 4Z; ein viertes, dessen Winkel jene von 2R — 8Z u. s. w. nicht übersteigt. Aus der daraus entstehenden geometrischen Progression des Unterschiedes Z, deren Glieder Z, 2Z, 4Z, 8Z, 16Z u. s. w. sind, wird dann der richtige Schluß gezogen, daß man in dieser Reihe auf ein Glied kommen müsse, das größer als jeder gegebene Winkel also auch gleich oder

größer

größer als 2 R werden könnte. Da es aber unmöglich ist, daß ein solches Glied von 2 R abgezogen werden kann, um 2 R zu geben, so ist auch die erste Annahme falsch, daß die Summe der drey Winkel eines Dreyecks kleiner als zwey rechte sey. Gegen diesen Beweis läßt sich aber Folgendes einwenden.

1. Zeigt der Verfasser nicht, daß bey der Construction der Dreyecke, wie BCD, u. s. w. der Punct D nothwendig zwischen die Schenkel des Winkels BAC fallen müsse. Wahrscheinlich hat er diesem Einwurf dadurch auszuweichen gesucht, daß er die Winkel BCA, CBA an der Grundlinie BC in dem Dreyecke BCD verwechselte, und anstatt ∢ DBC = ∢ CBA und ∢ DCB = ∢ BCA zu nehmen, den Winkel DBC = ∢ BCA und ∢ DCB = ∢ CBA machte. Denn hätte er das Erste gethan, so wäre, für den Fall, daß ∢ CBA > R, der Punct D schon außerhalb der Schenkel des Winkels BAC gefallen, wie es (Fig. 14.) zeigt. Indessen wäre es doch möglich, daß auch bey seiner Voraussetzung der Anlage der Winkel im Dreyecke BCD an die Grundlinie BC, der Punct D einmal außerhalb der Schenkel des Winkels BAC falle. Wenigstens ist man nicht berechtigt, dieses ohne Beweis anzunehmen, der ohnehin aus der Natur der Dreyecke nicht hervorgeht. Denn gesetzt, daß ∢ ACB > R, so wäre wohl ∢ ABC < R, daher sein Nebenwinkel EBC > R. Nun soll nach dem Verfas-

ser an B der ∢ DBC = ∢ ACB, welcher stumpf angenommen wird, gelegt werden. Da sich aber das Maaß der stumpfen Winkel DBC und EBC nicht vergleichen läßt, so kann man auch keineswegs versichert seyn, ob der Schenkel DB des Winkels DBC zwischen die Schenkel des Winkels EBC oder außerhalb derselben fallen werde, d. h. man ist nicht gewiß, ob der Punct D zwischen die Schenkel des Winkels BAC falle, oder nicht. Da aber von dieser Lage, des Puncts D die Reihe der Dreyecke EAF u. s. w. und von dieser die Stärke des Beweises abhängt, so sieht man ein, daß der Beweis selbst nicht bindend genug ist. Aber auch angenommen, man könnte vielleicht aus andern Gründen die Lage des Puncts D beweisen, wie sie der Verfasser annimmt, so ist doch

2) die Annahme, daß die durch D gezogene gerade Linie EF die Schenkel des Winkels BAC in zwey Puncten E und F schneiden soll. Dies annehmen wollen, wäre eben so gut, als Euclids XI. Grundsatz als bewiesen annehmen. Da der Punct D gegeben ist, so kann man durch diesen, und einen im verlängerten Schenkel AC beliebig angenommenen Punct F eine gerade Linie FD ziehen, und dieselbe auch, so weit man will, verlängern. Aber woraus soll denn dargethan werden, daß sie die verlängerte AB irgendwo in E schneiden werde? — Oder wollte man die Möglichkeit der Behauptung etwa dadurch rechtfertigen, daß man aus zwey beliebigen Puncten

F und f gerade Linien FD und fD nach D zöge, und in dem Falle, daß fD noch nicht mit der Verlängerung von FD zusammenfalle, die Linie fD der verlängerten FD so nähern, bis der Winkel EDf = o wäre, wo denn FDf eine einzige gerade Linie bildete, welche die Schenkel des Winkels BAC in zwey Puncten schnitte; so frägt es sich wieder, wodurch der Punct E bestimmt werden soll, in welchen f fallen müßte, damit FDf eine einzige gerade Linie vorstelle.

Wollte man endlich des Verfassers Behauptung dadurch rechtfertigen, daß man eine gerade Linie, wie BC z. B. so lange auf dem Schenkel des Winkels BAC herunterschiebt, bis dieselbe, durch D gehend, die Schenkel des gesagten Winkels schneiden müßte, so ließe sich dennoch, obgleich die Entfernung des Punctes D von A gegeben wäre, das Verhältniß der Stücke, welches zwischen zwey Lagen der herunter geschobenen Linie BC auf den Schenkel und der sich zu denkenden geraden Linie AD, als der Entfernung des Puncts D von A, statt hätte, daraus ganz und gar nicht ermessen. Was aber nothwendig wäre, um dies Verhältniß darzuthun, habe ich schon bey Gelegenheit der Prüfung der Theorie von Segner gezeigt, wohin ich meine Leser verweise. Man wird dort finden, daß das Mittel hiezu noch keinem Mathematiker gelungen, und folglich des Verfassers Behauptung, eine durch D gezogene Linie werde die Schenkel des Winkels BAC in zwey Puncten E und F schneiden,

ganz und gar unbewiesen sey. Daher bleibt auch die Möglichkeit des Dreyecks AEF und aller folgenden beweislos. Da aber auf der Fortsetzung dieser Dreyecke die Stärke seines Beweises beruht, so ist die Schlußfolge, daß die Summe der drey Winkel des Dreyecks ABC nicht weniger als zwey Rechte betragen könne, nicht in gehöriger Schärfe dargethan.

Der Verfasser sagt zwar in einer Note zur Rechtfertigung des Schnitts der Linie EF, man nehme an, der Winkel BAC sey der kleinste im Dreyeck ABC, und folglich kleiner, oder nicht größer als zwey Drittheile des rechten Winkels, um hierdurch die Möglichkeit noch augenfälliger (plus sensible) zu machen, daß eine gerade Linie durch D geführt zugleich die zwey verlängerten Seiten AB und AC scheide. Allein, so möglich es immer ist, den Winkel A als den kleinsten im Dreyecke anzunehmen, so sieht man doch daraus ganz und gar nicht ab, wie von der Kleinheit des Winkels, dessen Schenkel sich doch immer mehr entfernen, die Möglichkeit des Schnitts der EF mit den Schenkeln dieses Winkels abgeleitet werden könne. So besitzt also die Grundlage dieser Theorie, oder der Satz, daß die drey Winkel eines Dreyecks zusammen zwey rechte betragen, nicht Evidenz genug, um zur Stütze des schönen Gebäudes zu dienen, das der Scharfsinn seines Verfassers mit wahrer Meisterhand aufgeführt hat. Seine Darstellung ist neu, und verdient besonders in dem Beweise des §. 5. bewundert

dert zu werden. Nur bedarf der Eingang desselben noch einer nähern Berichtigung. Hier heißt es: Durch den Punct A (Fig. 12.) ziehe man irgend eine schiefe Linie AM, die der BD in M begegnet. Wie will man aber wissen, daß die AM der BD begegne? Man kann jedoch diese Stelle sehr leicht verbessern, indem man sagt: in BD nehme man irgend einen Punct M, und ziehe AM. Diese AM, welche die BD schneidet, fällt nun entweder mit AF zusammen, oder oberhalb, oder unterhalb, derselben. Im ersten Falle wäre der Schnitt der AF mit BD von selbst bewiesen, so wie auch im zweyten, weil die AF nun in der Fläche des Dreyecks BAM läge. Also bedarf nur der dritte Fall noch eines Beweises, wie ihn der Verfasser auch wirklich mittheilt.

Vierzehnter Abschnitt.

Die Theorie

von

J. C. Schwab. *)

Um die gegenwärtige Theorie der Parallellinien genau zu verstehen muß man besondere Rücksicht auf die Vordersätze nehmen, welche ihr scharfsinniger Verfasser in der Vorerinnerung seiner Schrift zum Grunde legt. Denn diese sind gleichsam die Basis, worauf sein ganzes System aufgerichtet wird. Ich will daher zuerst das Wesentlichste jener Vorbegriffe darstellen, und nachher ihre Anwendung auf die Parallelen vortragen.

Der

*) Tentamen novae Parallelarum theoriae, notione situs fundatae; auctore *I. C. Schwab*. Serenifs. Duc. Wirtemb. a cons. aul. Secret.; Imp. Scient. Acad. Petrop., Reg. Scient. Acad. Berol., et Batav. Scient. Soc. Harlem. fodali. Stuttgardiae, 1801. 8.

Der erste Versuch, den der Verfasser zur Berichtigung dieser Theorie machte, bestand darin, daß er den bekannten Lehrsatz (El. I. 28.):

„Wenn zwey gerade Linien von einer dritten geraden so durchschnitten werden, daß die beyden innern Winkel zwey rechte betragen, so sind jene beyde gerade Linien unter sich parallel,"

als eine Erklärung zum Grunde legte und hieraus sowohl die Euclidische Definition der Parallelen, als selbst auch das berüchtigte eilfte Axiom herzuleiten suchte.

So glücklich ihm dieses auch gelang, so konnte er sich dennoch hierbey nicht beruhigen, indem er wohl fühlte, daß der angeführte Satz (El. I. 28.), welchen Euclid und mit ihm alle Geometer als einen Lehrsatz aufstellten, nicht wohl die Stelle einer Erklärung vertreten könnte, sondern aus einer höhern Quelle abgeleitet werden müßte. Diese Quelle fand er in dem Begriffe der Lage, und er bemühte sich nun, eine Erklärung der Parallelen zu geben, worin diese Lage der Hauptbegriff wäre. Da nun zwey gerade in der nämlichen Ebene sich befindliche Linien, welche man gegen einander vergleicht, entweder einerley Lage, oder verschiedene Lage gegen einander haben können, so nannte er Parallelen jene gerade Linien, welche in der nämli-

lichen Ebene stets einerley Lage gegen sich haben.

In dieser Erklärung ist, nach dem Sinne ihres Erfinders, der Begriff von der Lage mit jenem der Identität verbunden, und der Parallellismus der geraden Linien besteht in der Identität ihrer Lage, so wie der Begriff von der Gleichheit auf der Identität der Größe beruht. Was aber die Lage eigentlich, und die Identität sey, läßt sich nicht befriedigend erklären, sondern diese höchst einfachen Begriffe können nur auf folgende Art mehr erläutert werden:

1) Die Lage entspringt aus der Vergleichung einer geraden Linie gegen eine andere, welche man sich nach Willkühr auf einer Ebene zieht.

2) Bey der Lage der Linien sieht man nicht auf ihre Größe.

3) Die Lage besteht nicht in dem Orte, den die Linien einnehmen.

4) Zwey gerade Linien, welche auf der einen Seite zusammen — und auf der andern auseinander laufen, behalten zwar immer ihren Ort; haben aber eine verschiedene Lage gegen einander.

5) Zwey gerade Lin'en, welche weder zusammen- noch auseinanderlaufen, verändern zwar ihren Ort; behalten aber immer die nämliche Lage.

6) Auch können zwey gerade Linien den Ort und die Lage zugleich verändern.

Nach der obigen Erklärung der Parallelen setzt nun der Verfasser folgende zwey Grundsäzze fest:

Erster Grundsatz.

Wenn zwey gerade Linien einerley Lage gegeneinander haben, so haben sie auch einerley Lage gegen eine dritte gerade Linie.

Zweyter Grundsatz.

Wenn zwey gerade Linien eine verschiedene Lage unter sich haben, so haben sie auch eine verschiedene Lage gegen eine dritte gerade Linie;

welchem der Verfasser einen so hohen Grad von geometrischer Evidenz zugesteht, daß sie ohne fernern Beweis als wahr angenommen werden müssen.

Dieses sind nun die Materialien, aus welchen der Verfasser mit Zuziehung solcher geometrischen Hülfssätze, deren Beweis von der Theorie der Parallelen ganz und gar unabhängig ist, seine neue Theorie herzuleiten sucht, welche sich im Wesentlichen auf folgende Darstellung gründet.

§. 1. Erklärung.

Zwey gerade sich in einerley Ebene befindliche Linien, AB und CD, (Tab. VIII. Fig. 1.) sind parallel unter sich, wenn sie einerley Lage gegen einander haben.

§. 2. Grundsatz.

Wenn die zwey geraden Linien AB und CD, (Fig. 2.) auf der nämlichen Ebene einerley Lage gegen einander haben, so haben sie auch die nämliche Lage gegen die dritte gerade Linie EF.

§. 3. Grundsatz.

Wenn zwey gerade Linien AB und CD, (Fig. 3.) gegen einander eine verschiedene Lage haben, so haben sie auch eine verschiedene Lage gegen die dritte gerade Linie EF.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn die zwey geraden parallelen AB und CD (Fig. 4.) von der dritten

ten geraden Linie EF durchschnitten werden, so ist der äußere Winkel FGB so groß, als der innere entgegengesetzte, auf der nämlichen Seite liegende Winkel FHD.

Beweis.

Da die geraden Linien AB und CD parallel sind (ex hyp.), so haben sie einerley Lage gegen einander (§. 1.). Daher haben sie auch einerley Lage gegen die sie schneidende Linie EF (§. 2.) Nun heißt aber die Lage zweyer geraden Linien, welche sich beyderseits schneiden, ihre Neigung; folglich ist die Neigung der AB gegen EF oder der GB gegen GF die nämliche, wie die Neigung der CD gegen EF oder der HD gegen HF. Also ist der Winkel FGB gleich dem Winkel FHD.

§. 5. Zusatz.

Aus dem nämlichen Grunde ist auch der äußere Winkel EHD dem innern Winkel EGB gleich.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn zwey Parallelen AB und CD (Fig. 4.) von einer dritten EF durchschnitten werden, so ist

1. Der Wechselwinkel AGH dem Wechselwinkel GHD gleich, und

2. Betragen die zwey innern auf einerley Seite liegenden Winkel BGH und GHD zusammen zwey rechte Winkel.

Beweis.

Da dieser Beweis der ganz gewöhnliche ist, so wird er hier übergangen.

§. 7. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien AB und CD (Fig. 4.) eine solche Lage gegen einander haben, daß, wenn sie von der dritten geraden EF durchschnitten werden, der äußere Winkel FGB so groß als der innere FHD ist, so ist AB mit CD parallel.

Beweis.

Gesetzt die beyden geraden Linien AB und CD seyen nicht parallel, so werden sie nicht einerley (§. 1.), sondern eine verschiedene Lage gegen einander haben. Wenn dieses aber ist, so haben sie auch eine verschiedene Lage gegen die dritte gerade EF (§. 3.), oder die GB wird eine andere Lage gegen GF, als HD gegen HF haben;

ben: d. h. die Winkel FGB und FHD werden ungleich seyn, welches gegen die Annahme streitet. Folglich ist AB mit CD parallel.

§. 8. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien AB und CD (Fig. 4.) von der dritten EF so durchschnitten werden, daß

1) Der Wechselwinkel AGH gleich ist dem Wechselwinkel GHD; oder daß

2) Die beyden innern Winkel BGH und GHD zwey rechte betragen, so sind diese Linien AB und CD parallel.

Beweis.

Da auch dieser Beweis der gewöhnliche ist, so wird er nicht angeführt.

§. 9. Lehrsatz.

Wenn die beyden geraden Linien AB und CD (Fig. 5.) mit der dritten EF parallel sind, so sind sie auch parallel unter sich.

Beweis.

Dieser ist der gewöhnliche.

§. 10. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punct G (Fig. 4.) mit der gegebenen geraden Linie CD eine gleichlaufende zu ziehen.

Auflösung.

Diese ist die allgemein bekannte.

§. 11. Lehrsatz.

Wenn man irgend eines Dreyecks ABC (Fig. 6.) Seite nach D verlängert, so ist:

1) Der äussere Winkel ACD den innern entgegengesetzten A + B gleich, und

2) Beträgt die Summe der drey Winkel A + B + ACB = 2 R.

Beweis.

Zieht man durch C mit AB die CE parallel, so ist Winkel ACE = A (§. 6.) und Winkel ECD

ECD = B (§. 4.), folglich ACE + ECD = A + B, oder ACD = A + B.

Da nun ACD = A + B, so ist auch ACD + ACB = A + B + ACB; allein ACD + ACB = 2 R; folglich auch A + B + ACB = 2 R.

§. 12. Lehrsatz.

In dem gleichschenklichen rechtwinklichen Dreyeck ABC (Fig. 7.) beträgt jeder der spitzen Winkel B und C die Hälfte eines rechten Winkels.

Beweis.

Dieser ist der gewöhnliche.

§. 13. Lehrsatz.

In jedem rechtwinklichen Dreyeck ABC (Fig. 8.) ist eine gerade Linie AD, welche von dem Scheitel des spitzen Winkels BAC nach einem willkührlichen Puncte D in der ihm entgegenstehenden Seite BC gezogen wird, kleiner als die Hypotenuse AC.

Beweis.

Wird wie gewöhnlich bewiesen.

§. 14.

§. 14. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreyeck ABC, (Fig. 8.) aus dem Scheitelpuncte eines beliebigen Winkels BAC die gerade Linie AD gezogen wird, welche diesen Winkel BAC auf irgend eine Art theilt, so muß sie, in ihrer Verlängerung, die entgegengesetzte Seite BC durchschneiden.

Beweis.

Dieser Satz, den man schon als Grundsatz aufstellen könnte, wird hier von dem Verfasser mit Evidenz bewiesen.

§. 15. Lehrsatz.

Wenn der Winkel ABC (Fig. 9.) größer ist, als der Winkel DEF, so wird man durch Halbirung von ABC, durch Halbirung seiner Hälfte, und so durch fortgesetztes Halbiren einmal auf einen Winkel kommen, der kleiner ist, als der Winkel DEF.

Beweis.

Der Beweis ist der bekannte und wird daher übergangen.

§. 16. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien AD und BC (Fig. 10.) von einer dritten AB so durchschnitten werden, daß die Summe der beyden innern Winkel weniger als zwey rechte beträgt, so müssen diese Linien auf der Seite jener Winkel zusammenlaufen.

Beweis.

Die Winkel DAB und CBA sind entweder gleich oder ungleich.

Erster Fall.

Es sey Winkel DAB = CBA.

Da hier DAB + CBA < 2 R, und DAB = CBA, so ist jeder der Winkel DAB und CBA kleiner als ein rechter. Errichtet man also auf AB aus A die Perpendikel AI, so fällt die AD zwischen AI und AB, und der rechte Winkel IAB ist größer als DAI.

Nun halbire man AB in E und errichte hier einen unbestimmten Perpendikel EH. Nimmt man nun EF = AE und zieht die AF, so ist AEF ein gleichschenkliches rechtwinkliches Dreyeck und Winkel EAF = $\frac{1}{2}$IAB, oder EAF = FAI. Daher hat die AF von dem rech-

ten Winkel IAB die Hälfte hinweg genommen.

Ferner setze man FG = AF und ziehe AG, so ist der Winkel GAF = FGA; aber EFA = GAF + FGA; folglich EFA = 2 GAF, oder GAF = $\frac{1}{2}$EFA. Allein EFA = FAI, folglich GAF = $\frac{1}{2}$FAI, oder GAF = GAI. Daher hat die gerade AG von dem Winkel FAI die Hälfte abgeschnitten.

Auf gleiche Art nehme man GH = AG und ziehe AH, so ist der Winkel GAH = $\frac{1}{2}$GAI und die AH hat wieder von dem übrig gebliebenen Winkel GAI die Hälfte weggenommen.

Da nun dieses Verfahren immer weiter fortgesetzt werden kann, so muß man (§. 15.) einmal auf einem Winkel IAH kommen, der kleiner als der Winkel DAI ist. Hier muß aber die AD innerhalb des Dreyecks AHE fallen, und also, bey ihrer Verlängerung die Seite EH nothwendig in irgend einem Puncte K durchschneiden (§. 14.).

Eben so evident kann man beweisen, daß auch die verlängerte BC die EH in dem nämlichen Puncte K durchschneiden müsse.

Zweyter Fall.

Die Winkel DAB und CBA seyen ungleich (Fig. 11.).

Hier

Hier ist einer größer als der andere. Es sey $DAB > ABC$, so werden, wenn man $EAB = ABC$ setzt, die Linien EA und BC zusammenlaufen und mit der AB ein Dreyeck bilden (Erster Fall.).

Nun halbire man den Winkel DAE durch die AF, und mache $BAG = DAF = EAF$, so muß zuerst die AG mit der BC zusammenlaufen.

Entweder fällt nämlich die AG unter AE (wie Fig. 11.), oder sie liegt über AE (wie Fig. 12.), oder sie fällt mit ihr zusammen.

In jenem Falle muß die AG die BC durchschneiden, da auch die AE mit der BC zusammenläuft (§. 14.). Eben dieses geschieht auch, wenn AG mit AE zusammenfällt.

In diesem Falle lege man an die CB den Winkel $CBH = FAE$, so ist, wegen $EAB = CBA$, auch $CBH + CBA = FAE + EAB$, oder $ABH = FAB$. Da nun $DAB + ABC < 2R$ (ex hyp.) und $DAF = CBH$; so ist $ABH + FAB < 2R$, und die AF und BH laufen zusammen (Erster Fall.). Also läuft auch BC mit AF, und AG mit BC zusammen (§. 14.)

Daß aber die AG über AG, und dennoch nicht in die AF fallen könne, erhellt daraus, weil

nun der Winkel BAG dem Winkel BAF gleich wäre; aber da BAG = EAF, so müßte BAF gleich seyn EAF, welches unmöglich ist.

Da nun bewiesen ist, daß die AG nothwendig mit BC zusammenlaufe und hier einen Winkel AGC bilde, so kann der Beweis fortgesetzt werden.

Da AGC = ABC + BAG (§. 11.) ABC = EAB und BAG = DAF; so ist AGC = EAB + DAF; aber EAB = EAG + (GAB =) EAF, folglich ist AGC = DAF + FAE + EAG = DAG. Also ist DAG = AGC.

Daß diese Winkel auch in dem Falle der Fig. 12. gleich seyn, wird auf folgende Art bewiesen. AGC = ABG + BAG (§. 11.); allein ABG = EAB und BAG = DAF, folglich ist AGC = EAB + DAF. Aber BAG = EAF, daher EAB = FAG; also AGC = FAG + DAF = DAG, oder DAG = AGC.

Allein diese beyde Winkel sind kleiner als zwey rechte; denn ABC + DAB < 2 R (ex hyp.); DAB = DAG + GAB; also ABC + DAG + GAB < 2 R; allein ABC + GAB = AGC (§. 11.); also auch AGC + DAG < 2 R.

So

So ist also der zweyte Fall auf den ersten zurückgeführt, und der ganze Lehrsatz bewiesen.

§. 17. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien AB und CD (Fig. 4.) in ihrer Verlängerung zu beyden Seiten niemals zusammenlaufen, so sind sie parallel.

Beweis.

Wären AB und CD nicht parallel, so hätten sie nicht einerley Lage gegen einander (§. 1.) folglich hätten sie eine verschiedene. Sie müßten also auch eine verschiedene Lage oder eine verschiedene Neigung gegen die dritte Linie EF haben, welche sie schneidet (§. 3.); d. h. die Neigung der GB gegen die GF wäre anders, als die Neigung der HD gegen HF. Also sind die Winkel FGB und GHD ungleich, und es ist FGB entweder $>$ GHD oder $<$ GHD. Es sey FGB $>$ GHD, so ist FGB + BGH $>$ GHD + BGH; aber FGB + BGH = 2 R, folglich GHD + BGH $<$ 2 R und die Linien GB und HD, oder AB und CD laufen gegen B und D zusammen (§. 16.), welches gegen die Voraussetzung ist.

Ist aber FGB $<$ GHD, so ist, wegen FGB = AGH, auch AGH $<$ GHD, und

AGH

$AGH + GHC < GHD + GHC$. Aber $GHD + GHC = 2R$, also $AGH + GHC < 2R$ und die Linien GA und HC, oder BA und DC müssen gegen A und C zusammenlaufen (§. 16.) welches ebenfalls der Annahme zuwider ist.

Anmerkung. Die noch folgenden Sätze enthalten eine weitere Darstellung der Parallel-Theorie, und werden hier, wo es nur um die Haupt-Ansicht des Verfassers zu thun war, füglich ausgelassen,

---

Prüfung dieser Theorie.

So sehr ich nun auch dieser Theorie das Lob zugestehen muß, daß sie mit Scharfsinn ausgedacht und fast durchgehends mit geometrischer Klarheit durchgeführt ist, so muß ich doch zugleich freymüthig bekennen, daß sie, als ein völlig befriedigendes System der Parallelen, nicht angesehen werden, und folglich die Lücke nicht ausfüllen könne, welche schon seit so langer Zeit in dieser intricaten Materie herrscht.

Ich will dem gelehrten Verfasser nicht geradezu widersprechen, wenn er mit den berühmten Ma-

Mathematikern Kästner und Karsten behauptet, diese so schlüpfrige Lehre könne sich erst dann zu der erwünschten Stufe der geometrischen Evidenz emporschwingen, wenn die Theorie von der Lage genauer entwickelt und auf die Parallelen gehörig angewendet werde. Allein es sey mir vergönnt, zu behaupten, daß sich die Systeme, welche bis jetzt über die Lage der Linien bekannt sind, nicht jenes Grades der geometrischen Klarheit schmeicheln können, welchen man eben hier fordern darf, wo es um eine streng systematische Darstellung zu thun ist. Es scheint mir, daß die Begriffe von der Lage überhaupt, von einerley und verschiedener Lage erst dann zur Begründung einer befriedigenden Theorie der Parallelen brauchbar werden können, wenn blos es einem scharfsinnigen Geometer gelingt, sie nicht philosophisch zu construiren, sondern auch mit den Elementarsätzen der Geometrie, besonders mit den Lehren des ebenen Winkels, in gehörige Verbindung zu bringen. Ausserdem bleibt immer entweder etwas Unbestimmtes und Schwankendes in der Erklärung, oder man leitet unvermerkt mehr aus diesen Erklärungen ab, als man, bey ihrer Festsetzung in sie hinein legte.

Wenn also der Verfasser diejenigen geraden Linien, welche in der nämlichen Ebene einerley Lage gegen einander haben, Parallellinien heißt, so scheint diese Erklärung nicht den gehörigen Grad von Deutlichkeit und Be-

Bestimmtheit zu haben, den sie besitzen müßte, um die Natur der Linien, von welchen man spricht, ganz genau festzusetzen. Es ist wohl nicht zu läugnen, daß zwey gerade in der nämlichen Ebene gezogene Linien irgend eine Lage gegen einander haben müßen, denn in dem Raume, wo sich z. B. die Linie a befindet, da kann nicht zugleich die Linie b, als eine von ihr verschiedene gedacht werden. Der Begriff von der Lage muß also wohl aus dem verschiedenen räumlichen Verhältnisse dieser beyden Linien entnommen werden. Er ist daher ein Verhältniß-Begriff und setzt, als solcher, eine Vergleichung zum voraus. Wo aber eine Vergleichung Statt finden soll, da müssen nicht nur zwey Dinge gegeben seyn, welche verglichen werden sollen, sondern man muß auch noch einen dritten Begriff haben, wonach diese Vergleichung geschieht, und der als gemeinschaftliches Merkmal von beyden Dingen angesehen werden kann. Soll also der Begriff von der Lage nicht unbestimmt seyn, so müßte auch bey der Erklärung von einerley und verschiedener Lage ein solcher dritter Begriff gegeben seyn, woraus man sogleich ersehen könnte, worin die Lage zweyer geraden Linien im Allgemeinen bestehe. Ohne einen solchen höhern Begriff ist nicht einzusehen, wie man den Unterschied zwischen einerley und verschiedener Lage festsetzen kann, ohne hierbey den sichtbaren gleichen Abstand, oder das sichtbare Zusammen- und Auseinanderlaufen der ge-

gezogenen Linien als Erklärungsgrund anzunehmen, welches doch offenbar blos auf den sinnlichen Schein gebaut und deshalb ungeometrisch seyn würde. Einerley und verschiedene Lage haben, sind also Ausdrücke, welche so lange zur Begründung eines strengen Systems der Parallelen unstatthaft seyn müssen, bis es auf eine geometrische Art bestimmt ist, worin diese Uebereinstimmung oder Verschiedenheit der Lage begründet sey.

Wie nothwendig es bey dieser Erklärung des Parallellismus sey, von einem höhern bestimmten Begriffe auszugehen, ergiebt sich um so mehr aus Folgendem. Man ziehe zwey gerade Linien (a und b) in einerley Ebene, welche sich weder in einem Puncte durchschneiden, noch Eine einzige gerade ausmachen, nach Belieben, so läßt sich ganz offenbar sagen, die Linie a habe hier dieselbige Lage gegen die Linie b, welche die b gegen die a hat. Denn, da man hierbey blos auf die Richtung und nicht auf die Größe der Linie sieht, so muß sich die eine gegen die andere gerade eben so vergleichen, wie diese gegen jene. Daher wird a gegen b, und b gegen a einerley Lage haben, und ein jedes willkührlich gezogene Linienpaar wird auf solche Art einerley Lage unter einander haben. Der Parallellismus solcher Linien kann also nicht darin liegen, daß zwey derselben die nämliche Lage gegen einander haben, sondern er muß das Resultat einer Vergleichung seyn, welche die Linie a nicht mehr gegen

b allein und b nicht mehr gegen a allein, sondern die a und die b zusammen gegen etwas drittes betrachtet. Dieses Dritte kann nun nichts anders seyn, als der immer gleiche Abstand der Linien, oder ihre Convergenz, oder ihre Divergenz. Setzt man also das Parallelseyn solcher Linien nur allein darin, daß sie einerley Lage gegen einander haben, so sind entweder jede zwey nach Belieben gezogene gerade Linien parallel, oder man schiebt dieser Erklärung Begriffe unter, welche man doch erst in der Folge aus ihnen herleiten will. In beyden Fällen ist also wohl diese Erklärung unbefriedigend, wenn sie nicht noch eine nähere und bestimmtere Deutung erhält.

Diese Betrachtungen scheinen hinreichend, um diese Erklärung der Parallelen als eine solche zu characterisiren, welche nicht im Stande ist, die Schwierigkeiten zu heben, die sich bey dieser Materie in den Weg stellen. Zu dem Obigen kömmt noch, daß einerley Lage haben, doch nichts anders heißt, als immer die nämliche Lage haben, d. h. gleichweit abstehen, oder niemals zusammenlaufen. Denn ohne sich bey der nämlichen Lage der beyden Linien wieder einen immerwährenden gleichen Abstand, oder ein nie erfolgendes Zusamentreffen vorzustellen, ist der Begriff von einerley Lage unverständlich und leer. Giebt man aber der Erklärung von der Identität der Lage die eine oder die andere Bedeutung so reducirt sich dieselbe auf eine der bey-

beyden bekannten Definitionen dieser Linien und ist keine neue Darstellung.

So wenig befriedigend als diese erste Erklärung ist, sind es auch die beyden Grundsätze, welche der Verfasser daraus herleitet. Denn da man eigentlich nicht genau weiß, worin die Identität der Lage zweyer Linien bestehe, so wird die Evidenz dieser beyden Axiome um so mehr hierdurch geschwächt, und man erblickt hier von Neuem die Unvollständigkeit dieses Systems. Die Anwendbarkeit beyder Grundsätze bezieht sich besonders auf den Fall, wo eine dritte gerade Linie gegen jede einzelne der beyden parallelen eine verschiedene Lage hat. Hier muß doch wohl die Frage entstehen: Wenn haben denn gerade Linien eine verschiedene Lage gegeneinder? Der Umstand, worauf diese Verschiedenheit der Lage beruhe, bleibt hier wieder vollkommen unbeantwortet. Sagt man: Linie haben verschiedene Lage, wenn sie nicht die nämliche Lage haben, so schiebt man die eigentliche Schwierigkeit nur zurück, statt sie gehörig zu beantworten. Es bleibt also auch hier ausgemacht, daß man diesen Sätzen so lange den Werth evidenter Axiome absprechen müsse, als nicht bestimmt gezeigt worden ist, worin eigentlich die Uebereinstimmung oder die Verschiedenheit der Lage zweyer geraden Linien bestehe. So lange man hier diese Mannigfaltigkeit der Lage nicht nach einem festen und dauerhaften Princip bestimmt, so lange darf man sich, wie ich glaube, keine befriedigende

Auf-

Auflösung des Problems versprechen. Daß der ebene Winkel zur Bestimmung der Lage einer geraden Linie gegen eine andere ein befriedigender Maaßstab sey, ist sehr richtig. Der Verfasser sucht selbst diesen Weg einzuschlagen und in der Folge seiner Darstellung die Gleichheit der Winkel an Parallellinien daraus abzuleiten. Er bedenkt aber hierbey nicht, daß allen diesen Sätzen von der Gleichheit der Winkel gerade deswegen die Evidenz gebreche, weil sie aus der Erklärung der Parallellinien und den beyden Grundsätzen fließen, welche nicht mit vollkommener Schärfe dargestellt und erwiesen sind. Denn es ist gerade die nähere Bestimmung der Lage der Linien vermittelst der Winkel, welche diese Sätze unbestimmt lassen.

Die erste Anwendung dieser Erklärung und Grundsätze macht der Verfasser in dem Beweise des Lehrsatzes §. 4., wo er zeigt, daß die Winkel FGB und FHD, (Fig. 4.) an den Parallelen AB und CD gleich seyen. Dieser Beweis ist evident, wenn man die Evidenz jener Vordersätze anerkennt. Aber man sieht auch hier wieder, worin das Unvollständige jener Vorbegriffe liegt. Die Lage der Linien AB und CD gegen einander, welche aus dem Begriffe der Identität nur unbestimmt folgt, bekömmt erst hier die gehörige Deutlichkeit und Bestimmtheit, wenn man sie nach den beyden Winkeln FGB und FHD festsetzt. Zuvor wußte man eigentlich nicht klar, worin die Identität der Lage der Linien AB und CD eigentlich bestehe; aber nun, wenn man die

schnei-

dende Linie FE setzt, und annimmt, daß BG eben so gegen FG geneigt sey, wie DH es gegen FH ist, d. h. daß Winkel BGF gleich ist Winkel DHF, bekömmt man einen bestimmten Begriff von der Lage der BG und DH und man könnte etwa sagen, weil die Neigung der BG gegen FG eben so groß ist, wie die Neigung der DH gegen FH, so hat die BG gar keine Neigung gegen die DH, und Parallellinien könnten hiernach mit größerer Bestimmtheit jene geraden Linien heißen welche in einerley Ebene so gezogen sind, daß sie beyde gar keine Neigung gegen einander haben. Der Begriff der Neigung zweyer geraden Linien setzt gewiß noch keinen Durchschnitt derselben zum voraus. Da es offenbar faßlicher ist einzusehen, wenn man sagt: Zwey gerade Linien haben keine Neiguug gegen einander, als: Zwey Linien haben einerley Lage zu einander, so scheint es, wenn sonst nichts Erhebliches eingewendet werden könnte, immer noch besser, den Parallellismus zweyer geraden Linien eher in die Abwesenheit ihrer Neigung, als in die Identität ihrer Lage zu setzen, da diese letztere Bestimmung dunkel und unverständlich ist. Ueberhaupt sieht man hieraus die Schwierigkeiten ein, welche sich den Mathematikern in den Weg stellen, wenn sie es versuchen wollen, die Theorie der Lage mit Evidenz darzustellen. Es fehlt auch noch in dieser Materie an der gehörigen Präcision der ersten Fundamentalbegriffe, deren Entwicklung sich hier, so wie in andern wissenschaftli-

chen

chen Elementarlehren unserm Forschblicke entzieht.

In der fernern Darstellung ist unser Verfasser deutlich und strenge. Da er aber einmal §. 11. den wichtigen Satz von der Gleichheit der drey Winkel im Dreyecke mit zwey rechten bewiesen hat, so hätte daraus der Beweis des berüchtigten XI. Euclidischen Axioms in §. 16. mit mehr Kürze hergeleitet werden können; obgleich nichts gegen die strenge Evidenz der Darstellung zu erinnern ist. —

Zum Schlusse dieser Critik sey mir die Bemerkung erlaubt, daß diese Schwab'sche Theorie der Parallelen, wegen des ganz eigenen Scharfsinnes, womit sie ausgedacht, und der geometrischen Darstellung, womit sie durchgeführt ist, unter den bekannten Systemen eine der vorzüglichsten Stellen verdiene; daß ihr aber dennoch in Ansehung ihrer Fundamentalsätze jener Grad der streng geometrischen Evidenz gebreche, der allein im Stande ist, einem Systeme der Parallellinien den Namen einer vollkommenen Berichtigung zu erwerben.

Funf-

Funfzehnter Abschnitt.

Die Theorie

von

Andreas Tacquet *)

§. 1.

Nach des Verfassers Erklärung sind Parallelen gerade Linien, die in einer Ebene liegen, und auf beyden Seiten ins Unendliche verlängert, beständig gleichen Abstand von einander haben (def. 36. pag. 6.). Die gleichen Abstände werden durch Perpendikel, die aus Puncten der einen Parallele auf die andere gefällt sind, bestimmt; und die Parallellinien selbst werden nach seiner Darstellung dadurch erzeugt, daß sich eine gerade Linie senkrecht auf einer andern geraden fortbewegt, wo der Endpunct der senkrechten Linie die Parallele beschreiben soll. Ausserdem nimmt er zum

*) *Andreas Tacquet*, Elementa Euclidea geometriae planae ac solidae etc. Romae 1745. in 8vo.

zum Grundsatze an (axiom. 11. pag. 8.), daß Parallellinien ein gemeinschaftliches Perpendikel haben; das heißt, daß eine gerade Linie, die auf einer der Parallelen senkrecht ist, auch mit der andern einen rechten Winkel bilde, und endlich behauptet er noch (axiom. 12.), daß zwey Perpendikel von Parallellinien gleich große Stücke abschneiden. Dies alles vorausgesetzt, folgt nun der Beweis des bekannten Lehrsatzes: „Wenn zwey Parallelen von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, so sind 1) die Wechselwinkel gleich, 2) der innere ist gleich dem äußern, und 3) die beyden innern betragen zusammen zwey rechte" auf die gewöhnliche Art durch Gleichheit der rechtwinklichen Dreyecke mop, mnp (Tab. IX. Fig. 8.). Nach diesem bemüht er sich in dem Zusatze seiner Prop. XXXI. pag. 27. Euclids eilften Grundsatz aus seinen vorausgeschickten Sätzen zu beweisen. Der Lehrsatz ist wörtlich dieser:

§. 2. Lehrsatz.

Wenn die gerade Linie MA, (Fig. 9.), in die geraden BC und AD einschneidet, und mit denselben auf einer Seite der schneidenden Linie zwey innere Winkel BAD, und ABC bildet, die kleiner sind, als zwey rechte, so werden die Linien BC und AD nach der Seite zusammenlaufen, wo

die Winkel liegen, die kleiner als zwey Rechte sind.

Beweis.

Weil nach der Voraussetzung die Winkel ABC und BAD kleiner als zwey rechte sind, so mache man ABC und BAX gleich zwey Rechten, so ist BC mit AX parallel. Ich nehme als einen für sich klaren Grundsatz an, daß es zwischen den Linien AD und AX, ins Unendliche verlängert, irgend eine Linie ZX, mit AM parallel gebe, die größer als AB sey. Man mache nun AR gleich ZX, und ziehe die Linie ZR. Weil hier AB und ZX parallel sind, so wird ∢ XZA = ∢ RAZ, auch ist nach der Construction AR = XZ und AZ = AZ; folglich auch ∢ RZA = ∢ XAZ, also RZ parallel mit AX. Aber es ist auch BC parallel mit AX, daher auch RZ parallel mit BC. Daher ist also BC mit RZ parallel und in das Dreyeck ARZ eingeschlossen. Da aber BC ins Unendliche verlängert werden kann, so muß sie die AZ nothwendiger Weise durchschneiden, da sie die mit ihr gleichlaufende RZ nicht erreichen, noch in den Punct A eintreffen kann.

Prüfung dieser Theorie.

Der Verfasser verläßt die Euclidische Definition der Parallelen, und glaubt glücklicher zu seyn, wenn er diejenigen geraden Linien gleichlaufend nennt, die, in Einer Ebene liegend, allenthalben gleichen Abstand behalten. Wolf in seinen Elementis geometriae, *Bezout* und *Bossut* in ihren Cours de mathématiques, tragen nebst Andern gleichfalls kein Bedenken, die Parallellinien eben so wie Tacquet zu definiren. Es wird demnach hier nicht am unrechten Orte seyn, einige allgemeine Bemerkungen über diese Erklärung vorauszuschicken.

Manche behaupten, daß die Euclidische Definition die Natur des Parallellismus nicht hinlänglich erkläre, indem sie sagen, daß das Nichtzusammentreffen zweyer geraden Linien, wenn gleich auch bey einer Verlängerung auf beyden Seiten ins Unendliche, das beständige Nähern dieser Linien, ohne zusammen zu treffen, nicht ausschließe, und führen, als Beyspiele, die Näherung ohne Ende der Hyperbel und ihrer Asymptote; der Conchoide des Nicomedes und der geraden Linie (regula); oder die gegenseitige Näherung zweyer gleichen Parabeln, auf einerley Axe beschrieben, ohne sich zu schneiden, und mehrere andere Linien hierzu an. Da nun aber kein Geometer die benannten Linien für Parallellinien gelten lassen wird, so muß, nach ihrer Meinung, das

das Parallelseyn zweyer geraden Linien nur in ihrer gleichen Entfernung zu suchen seyn. Sie nennen daher gleichweit von einander entfernte Linien gleichlaufend, und glauben, dieselben dadurch von allen andern Linien unterschieden und die zu weit scheinende Euclidische Definition eingeschränkt, ober auch zugleich eine feste Basis zur Berichtigung der Theorie selbst aufgefunden zu haben. Wie sehr man sich aber hierin irre, soll nun sogleich gezeigt werden.

Es ist wohl kein Zweifel, daß zwey gerade Linien, die, in Einer Ebene liegend, in allen Puncten gleiche Entfernung von einander behielten, sich nie schneiden können, und also auch parallel wären. Allein man scheint alsdann zu vergessen, daß man die Möglichkeit solcher zwey Linien gar nicht darthun kann, wenn man die Definition der Parallelen aus ihrer gleichweiten Entfernung hernimmt. Denn es lassen sich nur zwey mögliche Fälle zur Construction denken: 1) Man müßte aus zwey verschiedenen Puncten einer geraden Linie zwey gleich große Perpendikel errichten und ihre Endpuncte durch eine gerade Linie verbinden; oder 2) man müßte unendlich viele, gleichgroße Perpendikel auf einer geraden Linie errichten, und die Endpuncte, je zwey und zwey, durch gerade Linien zusammenziehen. Im ersten Falle wäre die durch die Endpuncte der zwey Perpendikel gezogene Linie wohl eine einzige gerade, die in zwey Puncten in ihr von einer

andern geraden gleichweit entfernt wäre; aber warum wollte man diese Linie parallel nennen? Sie müßte ja nach der obigen Definition in allen ihren Puncten gleichweit von der andern Linie abstehen; aber wo ist der Beweis geführt, daß, wenn eine gerade Linie in zwey Puncten gleiche Entfernung von einer andern hat, sie auch in allen übrigen Puncten gleichweit von ihr abstehen müße? Diese beyden Linien könnten ja zwischen den zwey gleichen Perpendikel, oder ausserhalb denselben, andere Entfernungen haben, und sich entweder nähern oder auseinander laufen.

Im zweyten Falle wäre die Linie, die durch die Endpuncte der unendlich vielen gleichen Perpendikel ginge, wohl in allen diesen Puncten gleichweit von der andern geraden Linie entfernt; allein, wer hat denn gezeigt, daß jene Linie eine einzige gerade sey? und zudem, wenn auch dieses als vollkommen bewiesen vorausgesetzt wäre, so käme man wieder in dieselbe Verlegenheit, wie im ersten Falle, weil man nämlich nie zwey Perpendikel so nahe an einander annehmen kann, ohne ein drittes zu denken, welches zwischen diesen beyden möglich ist. Man wüßte also dann wieder so wenig, wie in dem ersten Falle, ob die Linie in allen Puncten gleichweit von der andern entfernt sey oder nicht. *)

Die

*) Siehe hierüber die Prüfung der Hauff'schen Theorie der Parallelen. Abschnitt III.

Die obige Definition wäre also schon deswegen nicht anzunehmen, weil sie sich auf Eigenschaften der geraden Linie gründet, die gar nicht bewiesen sind, und hier etwas definirt wird, welches sich schlechterdings nicht construiren läßt. Daher ist diese ganze Definition blos problematisch. Wenn es aber, wie schon gesagt, ganz wahr ist, daß gerade Linien, die in allen Puncten gleiche Entfernung haben, nicht zusammenstoßen, so ist doch das umgekehrte dadurch noch keineswegs dargethan, daß nämlich zwey gerade Linien, die nicht zusammenstoßen, auch in allen ihren Puncten gleichweit entfernt sind, da es, wie bekannt, wegen der Lage dieser Linien gegen eine dritte schneidende mehrere Bedingungen giebt, unter welchen diese Linien nicht zusammenstoßen. Daß zwey gerade Linien, die mit einer dritten gleiche Winkel bilden, parallel sind, wird wohl nicht geläugnet werden; aber wer hat den Beweis strenge geführt, daß diese Linien auch allenthalben gleichen Abstand behalten? und welcher Mathematiker, der sich eine vollkommene Berichtigung der Theorie der Parallelen zu liefern vornimmt, wird dann den Schluß wagen, die Perpendikel allenthalben gleich groß anzunehmen? Die Definition der Parallelen, die auf gleicher Entfernung beruht, ist daher fehlerhaft, weil sie eines Beweises bedarf, und kann auch keineswegs zur befriedigenden Darstellung der Theorie selbst dienen. Hingegen setzt die Euclidische nichts als den Begriff der Lage gegen eine dritte voraus, der wirklich statt hat, und nicht nur die Möglichkeit der

Con-

Construction, sondern auch überzeugend darthut, daß die Linie bey dieser Voraussetzung nicht zusammenlaufen können. Euclid selbst mag das Mangelhafte jener Erklärung gefühlt haben, und war nicht so übereilt, aus seiner Definition schon unmitttelbar den Schluß herleiten zu wollen, daß diese Linien auch allenthalben gleiche Entfernung hätten. Er läßt sich darauf so wenig ein, als auf den Satz des nothwendig erfolgenden Schnitts, den er unter die Grundsätze aufnimmt. Die Euclidische Definition hat also bisher mit Recht noch immer den Vorzug behauptet; und so wenig einleuchtend immer seyn XI. Grundsatz, als solcher, ist; so hat man doch in einer Reihe von 2000 Jahren noch keine Darstellung an seine Stelle gesetzt, bey welcher man nicht auch etwas als wahr annehmen müßte, welches die Evidenz eines Axioms nicht besitzt. So weit die allgemeine Bemerkung, die zugleich auf die Definition von Tacquet anwendbar ist, und nur zur ferneren Prüfung seiner übrigen Sätze.

Um die Construction der Parallelen zu erklären, bewegt er einen Perpendikel auf einer andern geraden Linie fort, und nimmt als ausgemacht an, daß der Endpunct dieses Perpendikels die Parallele beschreibe. Allein, so gewiß es ist, daß dieser Endpunct eine Linie beschreibt, die in allen Puncten gleichweit von der geraden entfernt ist, so muß doch erst gezeigt werden, daß die also beschriebene Linie auch eine gerade sey, und diesen Beweis bleibt der Verfasser seinen Lesern schul-

schuldig. Außerdem muß man sich nicht wenig verwundern, den Satz: wenn eine Linie auf Einer der Parallelen senkrecht steht, so ist sie es auch auf der andern, als Grundsatz aufgestellt zu sehen. Freylich ließe sich so etwas aus seiner Definition herleiten; allein diese ist, wie schon gesagt, fehlerhaft, und sein Axiom ist Lehrsatz, wozu es am strengen Beweise gebricht.

Der Satz, daß zwey Perpendikel zwischen Parallelen gleich große Stücke abschneiden, ist eine nothwendige Folge aus dem eben angeführten Grundsatze und nicht selbst Grundsatz, wofür ihn doch der Verfasser ausgiebt. Er ist also auch, wie dieser Grundsatz, ohne Beweis. Der folgende Lehrsatz von der Gleichheit der Wechselwinkel u. s. w. ist zwar nach seinen Voraussetzungen richtig bewiesen. Da aber eben diese Voraussetzungen blos willkührlich sind, so fällt die Lücke bey dieser Darstellung von selbst in die Augen. Nun noch die Prüfung des Beweises vom Euclidischen XI. Grundsatze, der eine größere Aufmerksamkeit verdient.

Der Satz, daß die Linien BC und AD (Fig. 9.), die mit AM zwey innere Winkel bilden, welche kleiner sind, als zwey rechte, sich nothwendiger Weise durchschneiden, beruht darauf, die Linie BC in ein Dreyeck ARZ einzuschließen. Um aber zu zeigen, daß BC bey gehöriger Verlängerung, nur die Seite AZ treffen könne, bemüht sich der Verfasser darzuthun, daß

BC

BC parallel mit RZ sey. Da nun die BC auch nicht durch A gehen kann, so muß sie offenbar in AZ irgendwo eintreffen. Zum Behufe seines Beweises legt er AX so an AM, daß die Winkel ABC und BAX = 2 R sind, und glaubt nun als evident annehmen zu dürfen, daß man zwischen den Schenkeln des Winkels ZAX mit AM parallele Linien ziehen könne, die, wegen der Möglichkeit der Verlängerung der Schenkel dieses Winkels so weit man will, einmal größer werden müßten, als jede Größe, die sich angeben läßt. Nach diesem setzt er XZ > AB, zieht nun die RZ und behauptet von ihr, daß sie mit AX parallel sey. Allein dieser Satz von dem Größerwerden ohne Ende der Parallelen zwischen den Schenkeln des Winkels ZAX bedarf doch wohl eines Beweises, den man aber bey dem Verfasser vergebens aufsucht. Ich verweise die Leser auf meinen Beweis dieses Satzes (im letzten Abschnitte dieser Schrift) und füge hier nur noch die Bemerkung bey, daß, wenn man auch die Wahrheit desselben voraussetzen wollte, doch der Parallelismus der AX mit RZ unbewiesen bleibt, den er aus der Gleichheit der Winkel AZR und ZAX, wegen der Gleichheit der Dreyecke ARZ und AXZ, herleitet. Diese Gleichheit der Dreyecke beruht aber wieder auf der Voraussetzung, daß, weil AR parallel mit XZ ist, auch ∢ AZX = ∢ RAZ sey; Sätze, die der Autor zwar als bewiesen voraussetzt, deren Unzulänglichkeit aber schon gezeigt wurde. Folglich bleibt das Gleichlaufen der Linien AX und RZ ganz unbewiesen,

und daher auch die Behauptung, daß BC die AD irgend in einem Puncte durchschneiden müsse, weil man nun nicht mit Gewißheit weiß, ob BC mit RZ parallel und im Dreyecke ARZ eingeschlossen sey.

Die Bemühungen des Verfassers, die Theorie der Parallelen zu berichtigen, bleiben demnach fruchtlos, obgleich der Weg, den er einschlug, den XI. Euclidischen Grundsatz zu beweisen, angeführt zu werden verdient.

Sechs=

Sechszehnter Abschnitt.

Die Theorie

von

C. F. Hindenburg. *)

Der als ein vortrefflicher Mathematiker rühmlichst bekannte Verfasser dieser Theorie legte dieselbe zuerst in einer Abhandlung unter dem Titel: Ueber die Schwierigkeit bey der Lehre von den Parallellinien, dem mathematischen Publicum zur Prüfung öffentlich vor. Sie befindet sich im zweyten Stücke des Leipziger Magazins der Naturkunde, Mathematik und Oeconomie für das Jahr 1781. Da nun der Verfasser in der Folge Gelegenheit hatte, diese erstere Theorie noch mehr zu verbessern, so entstand hieraus sein neues System der Parallellinien, welches ich meinen Lesern hier wörtlich mittheile.

I. Er-

*) Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von J. Bernoulli und C. F. Hindenburg. Drittes Stück. 1786. S. 376 u. f.

I. Erklärung.

Gerade parallele Linien sind, die in Einer Ebene liegen, und nach beyden Seiten ohne Aufhören verlängert, nicht zusammenlaufen.

Diese ist von Euclids Erklärungen im ersten Buche die letzte. Sie bleibt auch an diesem Orte. Nach ihr folgen die Forderungen und Grundsätze, (jedoch mit Ausschluß des eilften Grundsatzes) so wie von den Aufgaben und Lehrsätzen die ersten 26 Sätze, nach ihrer Ordnung, wie sie im Euclides stehen. Alle Puncte, Linien und Winkel, wie sie in der Folge in einem Satze zusammen genennt werden, liegen durchgängig in Einer Ebene.

II. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien von einer dritten geschnitten werden und die Wechselwinkel an der schneidenden Linie sind gleich: so sind die beyden geraden Linien parallel.

III. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, und der äußere Winkel ist gleich dem innern ihm an einer Seite der schneidenden Linie entgegengesetzten; oder

die

die beyden innern Winkel an einer Seite sind zusammen gleich zween rechten Winkeln so sind beyde gerade Linien parallel.

Die Sätze II. und III. sind Euclid's 27. und 28ster Satz. Der Beweis ist wie beym Euclides.

IV. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punct mit einer gegebenen geraden Linie eine Parallele zu ziehen.

. Dies ist Euclid's 31. Satz, der auch nach seinem Systeme hier Platz nehmen kann, weil auf dessen Auflösung und Beweis (die auch hier nicht geändert werden) der 29. und 30ste Satz nicht den geringsten Einfluß haben. Dieser Satz, der (wie II. und III.) die Möglichkeit der Parallellinien darthut, wird sogleich in V. seine Anwendung finden.

V. Lehrsatz.

Gerade Linien, mit einer und derselben geraden Linie parallel sind unter sich parallel.

Es sey, (Tab. IX. Fig. 1. u. 2.), von den geraden Linien, AB mit EF, und CD mit dersel-

selben EF parallel. Ich behaupte, es werde auch die gerade Linie AB mit der CD parallel seyn.

Die Möglichkeit der Voraussetzung erhellet aus dem Vorigen, und es giebt hier zween Fälle, nachdem die Vergleichsparallele zwischen oder ausserhalb den andern beyden geraden Linien liegt, d. h. diese beyden Linien auf verschiedenen, oder auf einer Seite der Vergleichsparallele liegen.

Erster Fall. (Fig. 1.) Wenn die Vergleichsparallele EF zwischen AB und CD liegt; oder 1) AB parallel EF; 2) CD parallel EF; und man soll erweisen, daß auch AB parallel CD.

Beweis.

Wäre AB nicht parallel mit CD, so stießen diese Linien verlängert nach einer von beyden Seiten A, C oder B, D, zusammen. Gesetzt, es geschähe dieses nach B, D, so fiele der Durchschnittspunct G entweder unter die ausgezogene EF (und so wäre AB nicht parallel mit EF), oder über die EF (folglich CD nicht parallel mit EF), oder in die EF (also sowohl AB als CD nicht parallel mit EF). Das Erste hebt den Ersten, das Zweyte den zweyten Theil der Hypothesis oder Voraussetzung, das Dritte beyde Theile, oder die ganze Hypothesis auf. Folglich können die Linien AB und CD

nicht

nicht nach der Seite B D, zusammenstoßen, und aus eben den Gründen auch nicht nach der Seite A, C; also sind sie parallel. Welches das Erste war.

Zusatz 1. Die Linien AB, CD laufen nicht zusammen, wie groß man sich selbige auch gedenken, wie klein man auch ihre Entfernung von EF, und dadurch von einander annehmen will. Das Parallelseyn gerader Linien hängt also nicht von ihrer Größe, nicht von ihrer Entfernung, sondern blos von ihrer gegenseitigen Lage ab, die hier durch eine dritte Linie EF bestimmt wird, mit welcher AB, CD beyde parallel sind, d. i. mit welcher sie beyde einerley Lage haben.

Zusatz 2. Daß die Vergleichsparallele EF zwischen AB und CD blos die Lage dieser beyden Linien bestimmt, daß sie nicht etwa gleichsam eine Scheidewand abgebe, die das Zusammenlaufen derselben hindere, erhellet sogleich daraus, daß beyde noch parallel bleiben werden, wenn man auch die Linie EF zwischen ihnen herausnehmen wollte; und so übersieht man deutlich, (wenn EF ausserhalb fällt) wie man von der Lage zweyer Linien gegen eine dritte auf die gegenseitige Lage beyder Linien unter einander selbst, die eben durch diese dritte gegeben ist, kommen, und wie jede Linie einzeln gegen die andere gleichsam die Stelle der hinweg genommenen dritten vertreten könne.

Zu-

Zusatz 3. Liegt die Vergleichsparallele EF zwischen AB und CD (Fig. 1.) so sind AB uud CD parallel (1. Fall.), oder beyder Linien Lage gegen einander ist vollkommen bestimmt. Liegt die Vergleichsparallele EF außerhalb AB und CD (Fig. 2.), so lege man (Fig. 3.) eine von diesen beyden Linien über EF, welche man will, z. E. CD, in Gedanken in eben die Lage unter EF (drehe, mit Beybehaltung der gegenseitigen Lage, die CD um die EF, als eine unbewegliche Axe): so wird auch hier AB der CD parallel (1. Fall.). Durch dieses Herunterlegen (das in der Lage der AB und CD gegen EF nichts ändert; denn noch sind beyde, wie vorher, mit EF parallel, und eben so davon entfernt) kann nun die CD mit der AB in die parallele oder vollkommen bestimmte Lage nicht kommen, wenn beyde Lage nicht schon vorher vollkommen bestimmt ist; das heißt hier: wenn beyde nicht schon vorher eine parallele, oder vielleicht, wenn es möglich ist, Eine, zwar an sich bestimmte, aber jetzt noch nicht angebliche Lage von den unzählig vielen nicht parallelen Lagen haben.

Zusatz 4. Wie also nun die Vergleichsparallele liegen mag, so ist doch die Lage der mit ihr parallellaufenden Linie unter einander, an sich vollkommen bestimmt: parallel, wenn sie dazwischen liegt; parallel, oder vielleicht nicht parallel, wenn sie außerhalb liegt. Welches von

bey-

beyden im zweyten Falle statt habe, muß die Folge entscheiden.

Zweyter Fall (Fig. 2.). Wenn die Vergleichsparallele EF nicht zwischen, sondern außerhalb AB und CD liegt, oder 1) AB parallel EF, 2) CD parallel EF; und man soll erweisen, daß auch AB parallel CD.

Beweis.

I. Gerade Linien, mit einer und derselben außerhalb gelegenen (wie sie der 2. Fall bestimmt) parallel, müssen nothwendig, entweder

A) Alle einander parallel (alle AB und CD parallel); oder

B) Alle einander nicht parallel (keine AB und CD parallel); oder es müssen

C) Einige von ihnen einander parallel, einige nicht parallel (einige AB und CD parallel, einige nicht parallel) seyn.

Ein Viertes läßt sich nicht gedenken.

II. Nun aber kann C nicht statt haben. Denn, wären (Fig. 4.) AB, CD beyde mit EF und unter sich parallel, hingegen ab, cd zwar auch beyde mit EF, aber nicht unter sich parallel: so wäre die Lage der mit EF parallel-

lau-

laufenden Linien AB, CD, ab, cd nicht vollkommen bestimmt; wider Zus. 4. Also müssen, wenn AB, CD parallel sind, auch ab, cd nicht zusammenlaufen; und wenn ab, cd zusammenlaufen, auch AB, CD nicht parallel seyn; dem entgegen, was C behauptet.

III. Von den beyden übrigen Sätzen A und B, nehme man nun einen, welchen man will, z. E.

B) Alle gerade Linien, die einer und derselben außer halb gelegenen geraden Linie parallel sind, sind unter sich nicht parallel, oder laufen, gehörig verlängert, zusammen,

inzwischen bedingungsweise als wahr an, und prüfe ihn durch Folgen daraus, die man wieder mit andern, unzweifelhaft wahren Sätzen, in Verbindung bringt.

Wenn also (Fig. 5) 1.) AB parallel EF; 2.) CD parallel EF und AB, CD, gehörig verlängert (wie nach dem bedingungsweise hier angenommenen Satze B als nothwendig vorausgesetzt wird), nach einer von beyden Seiten irgendwo zusammenlaufen, oder AB nicht parallel mit CD: so ziehe man durch einen willkührlichen Punct I in AB eine Parallele GH mit CD (Satz IV.)

Also ist GH parallel CD (Constr. als Folge aus B)
und EF parallel CD (Voraussetz 1.)
folglich GH parallel EF (Fall I; weil hier die Vergleichsparallele zwischen GH und EF)

Aber CD parallel EF (Voraus. 2.);

Also GH nicht parallel CD (wegen des als wahr angenommenen Satzes B, weil die Vergleichsparallele EF hier nicht zwischen, sondern ausserhalb GH und CD liegt.).

Nun aber widersprechen GH parallel CD und GH nicht parallel CD (die erste Folge aus B und der letzte Schluß durch B) einander gerade zu; weil eine Linie einer und derselben andern Linie nicht zugleich parallel und auch nicht parallel seyn kann. So wird also der Satz B durch sich selbst umgestoßen, und kann folglich nicht wahr seyn, oder: Es ist falsch, daß gerade Linien, wie sie B bestimmt, zusammenlaufen.

IV. Also muß der einzige noch übrige Satz A wahr seyn, nach welchem solche Linien nicht zusammenlaufen; d. i. (Fig. 2.) für AB parallel EF und CD parallel EF muß auch AB parallel CD seyn. Welches das Zweyte war.

Gerade Linien also, mit einer und derselben geraden Linie parallel, sind unter sich parallel; die Vergleichsparallele mag nun zwischen ihnen,

nen, wie im ersten Falle, oder ausser ihnen, wie im zweyten Falle liegen. W. Z. E.

Anderer Beweis des zweyten Falles.

Von den beyden Linien AB, CD über EF (Fig. 3.) lege man eine, welche man will, z. E. CD, vollkommen so in eben die Lage unter EF (gedenke sich die CB um die EF, als eine unbewegliche Axe gedreht): so ist nun CD mit AB parallel (1. Fall.). Durch dieses Herunterlegen wird CD blos auf die andere Seite von EF gebracht, dadurch aber, in Absicht auf die Lage der AB und CD gegen EF nichts geändert; denn noch sind AB und CD, wie vorher, mit EF parallel. Also ist auch die Lage der AB und CD gegeneinander, die durch ihre Lage gegen EF gegeben ist, (Zus. 2.), nicht geändert, blos ihre Entfernung ist verschieden, worauf aber beym Parallelseyn gerader Linien nichts ankömmt (Zus. 1.). Was also von dem erstern Falle bewiesen ist, läßt sich sogleich, mit Ziehung des Begriffs von der Lage (worauf hier alles ankömmt) auf den zweyten Fall anwenden; und umgekehrt. Wenn also AB, CD erwiesenermaßen in einem Falle parallel sind, so müssen sie es auch im andern seyn.

Eben so, wenn man AB statt CD unter EF gelegt hätte, wäre AB mit CD nach dem er-

ersten Falle parallel; also müssen sie es auch im zweyten seyn.

Anmerk. Die bestimmte Lage, oder überhaupt die Lage gegebener gerader Linien bezieht sich hier blos auf ihr Parallelseyn oder Nichtparallelseyn. Winkel, wodurch in andern Fällen die Lage der schneidenden Linien näher bestimmt wird, kommen hier noch nicht vor. Auch muß man den Begriff von der Lage, wie er hier gebraucht wird, nicht mit dem vermengen, nach welchem man sonst die Lage einer geraden Linie nach der linken oder rechten Seite einer andern über ihr oder unter ihr, nicht selten unterscheidet, und in mancher Rücksicht auch unterscheiden muß. Nach der ersten Bedeutung des Worts (in der Geometria situs) sind die beyden Fälle, die hier im Satze V unterschieden worden, (wie aus dem beygebrachten zweyten Beweise klar erhellet) nicht von einander verschieden; wohl aber in der andern Bedeutung. So zeigt sich die Schwierigkeit in der Lehre von den Parallellinien in ihrem wahren Lichte und in ihrer ganzen Stärke, in so fern man Dinge, die dem Scheine nach verschieden, dem Wesen nach einerley, auf einem andern Wege berichtigen will, als den die Natur der Sache erfordert, und gleichsam selbst vorzeichnet. Anwendungen der Begriffe und Sätze von Lage, obschon nur der ersten und einfachsten, sind hier unvermeidlich.

VI. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, und die innere an einer Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel sind zusammen kleiner als zwey rechte: so stoßen diese geraden Linien verlängert nach der Seite, wo die kleinern Winkel liegen, zusammen.

Die geraden Linien AB, EF (Fig. 6.) schneide die gerade Linie GH, und es sey $\measuredangle BIK + \measuredangle IKF < 2R$: ich behaupte, die Linien AB, EF werden, verlängert, nach der Seite dieser Winkel, also nach B, F, zusammenlaufen.

Vorbereitung.

Weil $\measuredangle EKI + \measuredangle IKF = 2R$ und $\measuredangle BIK + IKF < 2R$ (Voraussf.), so ist $\measuredangle EKI + \measuredangle IKF > \measuredangle BIK + \measuredangle IKF$, also $\measuredangle EKI > BIK$. An I setze man $\measuredangle KID = \measuredangle EKI$, und verlängere DI nach C, so ist, wegen der gleichen Wechselwinkel EKI, KID, die Linie CD mit EF parallel (II.) und AB, CD schneiden einander in I.

Beweis.

Weil $\measuredangle EKI + \measuredangle IKF = 2R = \measuredangle AIK + \measuredangle KIB$, so ist $\measuredangle EKI + \measuredangle IKF$

+

$+ \sphericalangle AIK + \sphericalangle KIB = 4R$, und $\sphericalangle BIK + \sphericalangle IKF < 2R$ (Vorauss.) davon weggenommen, bleibt $\sphericalangle EKI + \sphericalangle AIK > 2R$. Also können AB, EF nach der Seite, wo diese grössern Winkel liegen, d. i. nach A, E, nicht zusammenstoßen.

Stießen nun AB, EF auch auf der andern Seite, nach B, F, nicht zusammen:

so wäre AB parallel EF (I. Erkl.)
so auch CD parallel EF (Vorb.)

folglich AB parallel CD (Satz V.)

welches sich widerspricht, da AB, CD einander in I schneiden (Vorber.). Also sind AB und EF nicht parallel, folglich schneiden sie einander, und zwar nach der Gegend B, F, wo $\sphericalangle BIK + \sphericalangle IKF < 2R$.

Also ist der Lehrsatz bewiesen.

Prüfung dieser Theorie.

Um das vorliegeude System der Parallelen, welches allerdings mit einem hohen Grade von Scharfsinn ausgedacht und mit einer dem Verfasser

fasser ganz eigenthümlichen Gewandtheit durchgeführt ist, gehörig zu würdigen, ist es nöthig, demselben Schritt vor Schritt zu folgen, und durch Anwendung einer strengen Critik alle Schlußfolgen sorgfältig zu prüfen, welche aus den zum Grunde gelegten Vordersätzen abgeleitet werden. Nur dadurch läßt sich die Frage entscheiden, ob diese Theorie allen Forderungen Genüge leiste, oder ob auch hier noch etwas zu beweisen übrig sey, was entweder gar nicht, oder doch nicht mit dem gehörigen Grade der Ueberzeugung dargethan ist.

Was nun zuerst die Erklärung der Parallellinien (in I.) betrift, so ist sie die bekannte Euclidische, welche sich auf das beyderseitige Nichtzusammenlaufen der in einerley Ebene gezogenen geraden Linien bezieht. Gegen die Gültigkeit dieser Definition läßt sich wohl nicht das Mindeste einwenden. Nur bemerke ich hierbey, daß sie eigentlich eine negative Erklärung sey, indem sie die Natur der Parallelen nicht durch ein wirkliches (positives) Merkmal bestimmt, sondern ihre Eigenthümlichkeit lediglich auf die Unmöglichkeit des Durchschnitts der Linien zu beyden Seiten, folglich offenbar auf ein verneinendes (negatives) Kennzeichen beschränkt. Der Parallellismus gerader Linien stellt sich also immer nur nach seiner negativen Bestimmung dar, und vielleicht muß man eben hierin die Urquelle der Schwierigkeiten suchen, welche sich bey Berichtigung dieser intricaten Materie

terie aufwerfen. Es sey mir erlaubt, an dieser Stelle ein Paar Worte hierüber zu sagen, weil man, soviel ich weiß, den eigentlichen Grund dieser Schwierigkeit gerade in diesem Umstande noch nicht aufzufinden versuchte.

Die negativen Merkmale sind von der Art, daß man sie nur aus den ihnen entgegengesetzten positiven erkennt. Sind diese positiven Kennzeichen bestimmt und deutlich, so lassen auch die Verneinungen (Negationen) derselben keine fernere Undeutlichkeit und Unbestimmtheit zu. Dieses läßt sich durch viele Beyspiele erläutern. Ist hingegen der positive Begriff, von dem der negative erst seine Bestimmung erhält, selbst noch nicht gehörig bestimmt, so fällt diese Unbestimmtheit mit auf den negativen, der von ihm abgeleitet wird. Soll also der negative Begriff den höchsten Grad der Vollkommenheit besitzen, so muß der ihm correspondirende positive auf eine evidente Art dargestellt werden können. Bey den sogenannten genetischen Erklärungen ist dieses immer der Fall. Hier zeigt man die Art und Weise, wie der Gegenstand, der erklärt werden soll, sein Entstehen erhält, und abstrahirt nun aus dieser Entstehung die nothwendigen Merkmale des Gegenstandes, welche, ihrer Natur nach, alle positiv seyn müssen. Ist nun auf diese oder eine ähnliche Art einmal der positive Begriff festgesetzt, so kann auch dem ihm zugehörigen negativen die gebührende Evidenz nicht gebrechen. Dieses kann nun auch auf die Euclidische Erklärung

rung der Parallelen angewendet werden. Besteht nämlich das Parallelseyn gerader Linien in dem nicht erfolgenden Durchschnitt zu beyden Seiten, so weit man sie auch verlängern mag, so ist dieses Nichtdurchschneiden eine negative Bestimmung, welche sich auf die ihr entgegengesetzte, d. h. auf das Durchschneiden, oder den willkührlichen Durchschnitt, bezieht. Soll also hier die Unstatthaftigkeit dieses Schnitts zu beyden Seiten deutlich eingesehen und bestimmt werden, so muß zuerst die Wirklichkeit des Schnitts selbst gehörig angegeben seyn. Allein eben in dieser Angabe der Wirklichkeit oder Nothwendigkeit dieses Durchschnitts bey geraden Linien liegt die Hauptschwierigkeit in der Parallel-Theorie. Man kann sich wohl zwey gerade Linien in einerley Ebene denken, welche sich in einem Puncte durchschneiden, d. h. einen ebenen Winkel bilden. Dieses rechtfertigt aber die Annahme des Durchschnittes in dem Sinne, wie er in der Theorie der Parallellinien betrachtet wird, ganz und gar nicht. Bey dem Durchschnitt der Schenkel eines Winkels im Scheitel nimmt man immer zwey Puncte willkührlich an, welche die Lage des einen Schenkels bestimmen, und wovon der eine innerhalb des einen Schenkels, der andere außerhalb desselben gesetzt wird. Da man nun hierbey den einen Punct immer in dem einen Schenkel zum voraussetzt, so muß der andere Schenkel den ersten nothwendig schneiden. Von einem solchen, schon im Voraus durch die Annahme bestimmten Durchschnitts-

schnittspuncte spricht man aber nicht in der Parallel-Theorie. Hier will man vielmehr einen erst noch zu bestimmenden Punct für den Durchschnitt der beyden Linien behaupten, welcher durch ihr einmal erfolgendes Zusammenlaufen gebildet wird.

Aus diesem geht nunmehr die eigentliche Natur der Euclidischen Definition der Parallelen hervor, deren wahrer Character darin besteht, daß kein Durchschnitt erfolge, so weit auch die geraden in derselbigen Ebene liegenden Linien zu beyden Seiten verlängert werden und so weit oder so nahe diese Linien (wenigstens in zwey Puncten) von einander abstehen mögen. Dieser negativen Bestimmung kann man folgende positive Erklärung entgegensetzen. Gerade, in einerley Ebene liegende Linien sind nicht parallel, wenn bey ihrer Verlängerung auf einer Seite ein Durchschnitt erfolgt, obgleich ihr Abstand (wenigstens in zwey Puncten) noch so groß oder so klein ist.

Diese positive Erklärung kann nun nicht angenommen werden, weil sie selbst erst als Folgesatz aus der ganzen Untersuchung hervorgehen soll. Daher kann auch die negative Erklärung durch sie keine vollständige Bestimmung erhalten. Es bleibt also nichts übrig, als die positive abzuleiten. Allein streitet dieses nicht wider die Natur der Sache selbst, da sich das Positive nicht durch das Negative bestimmen läßt, weil das Negative selbst nichts anders, als eine Abwesenheit oder

Ver-

Verneinung des Positiven ist, und so mit das Letztere jedesmal zum voraussetzt? Sollte wohl nicht hierin der erste und oberste Grund aller Schwierigkeiten zu suchen seyn, welche in der Parallel-Theorie herrschen, und welche man öfters in abgeleiteten Sätzen zu entdecken glaubte, die am Ende doch insgesammt aus jener Urquelle entspringen?

Man schrieb dieses Schwierige bisweilen auf Rechnung des Begriffs vom Unendlichen, welcher sich bey dieser Theorie einmischt. Die Parallellinien laufen, ins Unendliche verlängert, nicht zusammen, wenn bey einer sie schneidenden geraden dritten Linie die Summe der innern Winkel zwey rechte beträgt. Ist diese Summe kleiner, so erfolgt jedesmal der Durchschnitt; allein dieser Punct liegt jetzt immer in grösserer Entfernung von der schneidenden Linie, je mehr sich diese Summe zweyen rechten Winkeln nähert. Es giebt also hier, sagt man, keinen letzten Durchschnittspunct, und der Uebergang der Linien aus dem Zustande ihres Schneidens in die Lage des Parallelismus ist schlechterdings unbestimmt und unangebbar. Eben so läßt sich auch umgekehrt bey dem Uebergange der Linien aus der parallelen Lage in eine andere, wo die Summe der innern Winkel weniger als zwey rechte ausmacht, der erste Durchschnitt der beyden Linien nicht bestimmt angeben. In diesem Begriffe des Unendlichen, sagt man ferner, liegt also das Hinderniß, welches sich jeder

zu

zu entwerfenden Theorie der Parallelen entgegenstellt. — Es ist nicht schwer einzusehen, daß sich diese Schwierigkeit als eine leichte Folge aus dem Obigen ableiten lasse, und folglich ebenfalls in der negativen Bestimmung des Begriffs der Parallinien zu suchen sey.

Allein, wo findet man die Quelle, woraus die Definition der Parallelen durch positive Merkmale hergeleitet werden kann?

Die Auflösung dieses Problems ist verwickelt und schwer und dürfte vielleicht noch lange dem Scharfsinne der votrefflichsten Mathematiker entschlüpfen, da bis ietzt bereits so viele helldenkende Geometer ihre Kräfte hierin vergeblich versuchten. Will man hier einen andern Weg einschlagen und die Parallellinien als gleichweit abstehende Linien betrachten, so werfen sich wieder neue Hindernisse auf, wie aus dem oben Angeführten ausführlicher erhellet.

Nach dieser kleinen Abschweifung, worin ich einige Bemerkungen über die Euclidische Definition der Parallelen vortrug, welche ich nicht gerade für unfehlbare Wahrheit, sondern nur für eine geometrische Muthmaßung angesehen wissen will, kehre ich wieder zum fernern Verfolge des Hindenburg'schen Systems, und den Anmerkungen darüber zurücke.

Die Lehrsätze (II. und III.), welche der Erklärung (I.) folgen, sind bekannt, und enthalten die Bedingungen, unter welchen die Parallellinien (im Sinne der 1. Erkl.) eigentlich möglich sind. In Ansehung ihrer Evidenz ist wohl gar nichts zu erinnern. Nur muß ich hier schon im Betreff ihrer Anwendung auf die folgende Darstellung bemerken, daß man immer die Ursache vor Augen habe, welche dem Parallellismus dieser Linien eigentlich zum Grunde liegt. Man muß (oder man darf wenigstens) immer an eine dritte sie schneidende Linie denken, welche mit ihnen verschiedene Winkel bildet, von deren Verhältniß ihr Parallelseyn ursprünglich abhängt. Denn da diese Linien nur deshalb parallel sind, so darf sich auch aus dieser Annahme in Verbindung mit andern Sätzen nie ein Widerspruch zeigen.

Die Aufgabe (IV.) ist für sich selbst klar und bedarf also keiner Erinnerung.

Mit dem Lehrsatz (V.) beginnt die eigenthümliche Darstellung des Verfassers. Der erste Fall dieses Satzes, wenn die Vergleichungsparallele zwischen die äußern Linien fällt, deren Parallellismus gezeigt werden soll, ist strenge bewiesen. Indessen muß es hierbey auch erlaubt seyn, auf die Bedingnisse zurück zu sehen, unter welchen AB mit EF und CD mit EF parallel seyn können. Dieser Parallellismus muß (wenn man weder auf die Wechselwinkel noch auf die

Sum-

Summe der innern sieht,) aus der Gleichheit der äußern und innern Winkel folgen, welche entstehen, indem (Fig. 7.) die Linien AB, EF und CD, EF einzeln, oder die drey Linien AB, EF und CD zugleich von einer sie schneidenden Linie gebildet werden. Es können hierbey drey Fälle eintreten:

1) Wenn gh die schneidende Linie für AB und EF ist, wobey man $\measuredangle\, o = \measuredangle\, u$ setzt;

2) Wenn mn die schneidende Linie für EF und CD ist, wobey man $\measuredangle\, x = \measuredangle\, y$ nimmt;

3) Wenn pq die schneidende Linie für AB, EF und CD ist, wobey man $\measuredangle\, Z = \measuredangle\, v = \measuredangle\, w$ setzt.

Von diesen drey Fällen muß man entweder die beyden ersten, oder den dritten als nothwendige Bedingniß zur Construction der Linien AB, EF und CD annehmen. Für den dritten Fall ist nun, wegen $\measuredangle\, Z = \measuredangle\, w$ auch die AB parallel mit CD (III. Satz.). Sind hingegen diese Linien durch die schneidenden gh und mn construirt, dergestalt, daß man $\measuredangle\, o = \measuredangle\, u$ und $\measuredangle\, x = \measuredangle\, y$ setze, so läßt sich der Schluß auf das Parallelseyn der AB und CD nicht mehr aus den Winkeln herleiten. Selbst in dem Falle, wo man $\measuredangle\, x = \measuredangle\, u$ setzte

setzte und nun den ∢ y auch = x machte, um die Lage der CD zu bestimmen, könnte man, obschon hier ∢ o = ∢ u = ∢ x = ∢ y wäre, doch nicht aus den Winkeln auf den Parallelismus der CD und AB schließen, da hier die Linien gh und mn zwey verschiedene und nicht eine einzige schneidende Linie ausmachen. Ich setze dieses deshalb hier etwas umständlicher auseinander, damit man die Folgen, welche aus den gleichen Winkeln und aus der (durch sie bestimmten) Lage der Linien hergeleitet werden können, desto richtiger zu übersehen im Stande sey.

Daß das Parallelseyn (d. h. das Nichtzusammentreffen) gerader Linien (nach Zus. 1.) weder von der Größe noch von der Entfernung derselben abhängen, ist außer allem Zweifel. Wenn hingegen der Verfasser sagt, daß der Parallellismus blos von der gegenseitigen Lage dieser Linie abhänge, so muß man, (um hier nicht schon mehr zu folgern, als erwiesen ist) sehr scharf und genau unterscheiden.

Der Satz: Zwey gerade Linien, sie mögen gen noch so groß, oder noch so klein, noch so entfernt oder noch so nahe seyn, können einmal in den Zustand kommen, daß sie sich nicht durchschneiden, bestimmt allerdings eine gewisse Lage für diese beyden Linien, welchen man die Lage ihres Nichtzusammenstoßens nennen kann. Aber hierdurch ist noch keineswegs entschieden, ob diese Lage nur eine einzige

sey,

sey, oder ob es, außer der Einen, welche man durch die Construction der Linien aus den gleichen Winkeln erhält, nicht noch mehrere andere Lagen geben könne, worin sich diese Linien ebenfalls niemals durchschneiden. Will man daher von den Linien AB, CD, welche bey jeder Verlängerung zu beyden Seiten die mittlere EF nicht durchschneiden, sagen, sie hätten einerley Lage gegen diese EF, so muß man immer bedenken, daß in diesem Sinne) einerley Lage haben nicht so viel heißen könne und dürfe, als nur eine einzige Lage haben. Dieses hier schon annehmen wollen hieße soviel, als einen Satz annehmen, dessen Wahrheit erst als Folge aus der bewiesenen Parallel-Theorie hergeleitet werden soll. Es läßt sich also auch nicht mit einleuchtender Evidenz darthun, die Lage der AB und CD werde hier durch die dritte Linie EF in so weit bestimmt, als man dadurch sagen will, daß AB und CD die einzigen Linien seyen, welche, vermöge ihres Parallelismus mit EF, auch unter sich parallel seyn müßen, d. h. nicht zusammenlaufen können.

Nun sagt der Verfasser ferner (Zus. 2.): „und so übersieht man deutlich, (wenn auch EF „ausserhalb AB und CD fällt), wie man von „der Lage zweyer Linien gegen eine dritte, auf die „gegenseitige Lage beyder Linien unter einander „selbst, die eben durch diese dritte ge„geben ist, kommen könne.“ Diese Behauptung muß wieder eine ähnliche Einschränkung, wie die vorige, erleiden.

Wenn

Wenn man gleich von der parallelen Lage der AB gegen EF und der CD gegen EF auf den Parallelismus der AB und CD schließen, und (in Bezug auf diese Linien) behaupten kann, diese parallele Lage der AB und CD unter sich sey durch das Parallelseyn einer jeden von ihnen mit EF gegeben; so folgt doch hieraus gewiß noch nicht, daß die Lage der AB und CD gegen einander die einzige sey, in welcher sie unter sich parallel laufen. Es bleibt immer noch unbestimmt, ob es außer der AB nicht noch eine oder einige Linien gebe, welche auch die Eigenschaft haben, bey jeder Verlängerung zu beyden Seiten nie in die CD einzutreffen. Daß es aber hierauf ganz besonders bey dem System des Verfassers ankomme, beweiset Zus. 3., wo es heißt: „Liegt die Vergleichsparallele EF zwischen „AB und CD, (Fig. 1.), so sind AB und CD „parallel (1. Fall.) oder beyder Linien Lage gegen „einander ist vollkommen bestimmt." Hier frage ich: worin besteht denn die vollkommne Bestimmung der Lage zweyer geraden Linien gegen einander? — Will man bey der Beantwortung nicht mehr zum voraussetzen, als, in strenger Form, aus dem Bisherigen folgt, so ist die Lage der AB und CD nur in so fern gegen einander bestimmt, als man bewiesen hat, daß sich beyde niemals durchschneiden können; aber beyder Lage ist nicht in dem Sinne vollkommen bestimmt, daß es ausser der AB keine Linie mehr geben könne, welche nicht mit CD; und außer der CD keine andere, welche mit

AB gleichfalls nicht zusammenlaufen werde. So lange es also noch nicht vollkommen evident ausgemacht ist, daß es durch den Punct A nur Eine AB gebe, welche parallel ist mit EF, und eben so durch den Punct C nur Eine Parallele CD mit der nämlichen EF, so lange läßt sich auch gewiß nicht mit vollkommner Ueberzeugung behaupten, die Lage der AB sey gegen jene von CD vollkommen bestimmt. Es folgt hieraus blos, daß die Lage der AB und CD eine parallele sey, daß es aber auch die einzig mögliche seyn müße, in welcher sich AB und CD niemals durchschneiden können, ist hieraus schlechterdings nicht abzuleiten.

Hieraus ist nun ersichtlich, daß der Verfasser die Begriffe: Parallelseyn, und: eine vollkommen bestimmte Lage haben, für identische Begriffe hält, was doch sicher nicht geschehen darf, da Parallellaufen nur so viel heißt, als niemals zusammenlaufen, und eine vollkommen bestimmte Lage haben nichts anders heißen kann, und, nach dem System des Verfassers, heißen soll, als die einzig mögliche Lage, welche zwischen den Linien statt haben kann. Es wird also bey diesem Systeme der Parallelen hier schon ein Satz vorausgesetzt oder als eine (nicht zu rechtfertigende) Folge abgeleitet, wodurch man, wenn er einmal als evident angenommen wird, im Stande ist, die Parallel-Theorie mit voller geometrischen Strenge darzustellen. Dieser Satz heißt: durch einen

Punct ausser einer Linie giebt es in derselbigen Ebene nur eine einzige, welche mit ihr parallellaufend ist.

Nach diesen Bemerkungen gehe ich zur Prüfung des Beweises über den zweyten Fall, worin gezeigt werden soll, daß unter der Annahme (Fig. 2.) AB parallel EF, CD parallel EF, auch AB parallel CD seyn müsse. Hierbey kommt alles darauf an, die Falschheit des Satzes B. Alle gerade Linien die einer und derselben ausserhalb gelegenen geraden Linie parallel sind, sind unter sich nicht parallel, oder laufen, gehörig verlängert, zusammen, evident darzuthun. Der Verfasser will diesen Satz indirect beweisen, d. h. er er legt dessen Wahrheit bedingungsweise zum Grunde und sucht hieraus einen Widerspruch mit schon als wahr erkannten Sätzen herzuleiten. Allein, wenn mich nicht alles trügt, so hat der Verfasser hierbey den Geist der indirecten Methode gänzlich verkannt, und sich von dem Scheine eines offenbaren Trugschlusses hinreißen lassen. Die bindende Kraft des indirecten Beweises besteht darin, daß man einen Satz, über dessen Wahrheit oder Falschheit erst geurtheilt werden soll, als eine bewiesene Wahrheit zum Grunde legt, und denselben durch richtige Schlüsse mit andern ebenfalls schon als wahr eingesehenen Sätzen so lange vergleicht, bis sich mit diesen letztern ein offenbarer Widerspruch zeigt. Kömmt man auf solche Art zu einer

ner widersprechenden Behauptung, so muß wohl der blos bedingungsweise zum Grunde gelegte Satz ohne Widerrede falsch seyn, weil aus wahren Vordersätzen durch richtige Schlüsse nie etwas anders als wahre Schlußsätze hervorgehen können, und eine Voraussetzung offenbar falsch seyn muß, woraus man durch wahre Schlüsse auf eine Unwahrheit geführt wird. Hieraus ergiebt es sich sogleich, daß es in diesem indirecten Beweise nicht erlaubt sey, den Satz selbst, dessen Wahrheit erst indirect bewiesen werden soll, im Gange des zu führenden Beweises darüber, als eine schon erwiesene Wahrheit zu citiren. Hierdurch wird ja gerade dasjenige als schon bewiesen angenommen, was erst durch die bindende Kraft des Beweises als wahr dargethan werden soll, und man erlaubt sich hier einen fehlerhaften Cirkel im Beweisen. Daß dieses aber bey dem Hindenburg'schen Beweise wirklich der Fall sey, ist nicht schwer einzusehen. Er setzt voraus, daß (Fig. 5.) A B parallel E F und C D parallel E F sey, und nimmt nun bedingungsweise an, daß A B und C D zusammenlaufen. Der Widerspruch, der aus dieser problematischen Annahme folgt, soll darin liegen, daß die mit C D parallel gezogene G H diese C D nothwendig durchschneiden müsse. Die Ursache dieses nothwendigen Durchschnitts liegt aber in der Wahrheit des (erst zu beweisenden) Satzes, daß die zwey Linien G H und C D, welche einzeln mit E F parallel sind, zusammenlaufen müßen. Fragt man nun, warum diese

bey-

beyden Linien sich schneiden müßen, so ist die Antwort: wegen des bedingungsweise als wahr angenommenen Satzes, dessen Wahrheit aber erst durch den Beweis selbst gezeigt werden soll. Es ist also wohl klar, daß es diesem indirecten Beweise deshalb an der nöthigen Stärke gebreche, weil in demselben das Zusammenstoßen der Linien GH und CD als nothwendig angenommen wird, was man doch erst bedingungsweise, d. h. problematisch zum Grunde gelegt hat.

Von diesem ersten Beweise gehe ich nun zur Prüfung des andern Beweises über den zweyten Fall, welchen der Verfasser dem ersten bey weitem vorziehet. Seine eigentliche Stärke besteht in einer Verbindung des Beweises über den ersten Fall mit den beyden Behauptungen, welche im ersten und zweyten Zusatze zu jenem Beweise enthalten sind. Diese Sätze sind:

a) Wenn (Fig. 3.) die CD über EF in eben der Lage, nach CD unter die EF kömmt, so ist die Lage der AB und CD (unter EF) gegen einander, welche durch ihre Lage gegen die EF gegeben ist, nicht geändert; und

b) Wenn CD unter EF liegt, so ist blos die Entfernung der CD (unter EF) von der Entfernung verschieden, welche zuvor CD (über EF) von AB hatte. Auf die Entfernung

nung kömmt aber bey dem Parallelseyn gerader Linien gar nichts an.

In Rücksicht des ersten Satzes verweise ich auf die Bemerkungen, welche oben über den Zus. 2. angeführt worden sind. In Ansehung des zweyten ist wohl klar, daß es bey dem Parallelismus der geraden Linien nicht auf ihre Entfernung ankomme, denn es lassen sich in jeder Entfernung von einer gegebenen geraden Linie andere gerade ziehen, welche mit der gegebenen niemals zusammentreffen können; allein in dem vorliegenden Beweise ist nicht allein von der verschiedenen Entfernung der Linien CD von der AB, sondern von der Lage der erstern gegen die letztere die Rede. Wenn CD (über EF) parallel ist mit EF, und diese CD nun unter EF gelegt wird, so ist wohl bewiesen, daß nun diese CD (unter EF) auch parallel seyn müsse mit AB; aber folgt wohl hieraus schon mit strenger Evidenz, daß auch die CD (über EF) nun mit der AB parallel seyn werde? Gewiß nicht. Die CD (unter EF) wird nur durch die zwischen ihr und AB liegenden EF mit AB verglichen, und wo eine solche mittlere Vergleichsparallele wegfällt, da hat auch der Schluß auf den Parallelismus der beyden Linien (in strenger Form) nicht mehr statt. Der Schluß von der CD unter EF auf die CD über EF ist daher immer nicht bindend, obgleich jene Linie unterhalb und diese oberhalb der EF die nämliche Lage gegen diese EF hat. Sobald man die CD (über

EF)

EF) annimmt, so fehlt es immer an einem streng bewiesenen Mittelsatze, der die Lage dieser CD mit AB in Vergleichung bringt. Der ganze Beweis des Verfassers reducirt sich also darauf: Weil die CD, unter EF gelegt, mit AB parallel ist, so muß sie auch über EF mit der AB parallel seyn, weil sie in beyden Fällen mit der EF einerley parallele Lage hat.

Es ist also wohl einleuchtend, daß es diesem Beweise auch an der nöthigen Strenge fehle, da der Begriff von der Lage nicht so streng geometrisch bestimmt ist, wie er es seyn müßte, wenn aus ihm eine vollendete Berichtigung der Parallel-Theorie hervorgehen sollte. Wo man einmal einen strengen Beweis liefern will, da muß auch alles, was als Mittel dient, um ihn zu liefern, mit gleicher Strenge bestimmt seyn. Denn eben hierin liegt ja die Schwierigkeit dieser Lehre, und alle bekannten Theorien über dieselbe zeichnen sich nur dadurch aus, daß sie sich dem Ziele, das Euclidische XI Axiom mit Evidenz zu beweisen nur mehr oder weniger annäherten, ohne es doch bis jetzt noch vollkommen erreicht zu haben.

Die Sätze, worauf sich der Hindenburg'sche zweyte Beweis gründet, sind allerdings von der Art, daß man, ohne die schärfste Critik, allerdings geneigt seyn möchte, ihnen den Werth einer evidenten Demonstration zuzugestehen. Allein die Sache selbst erfodert es, hier

nicht

nicht das Mindeste unbewiesen anzunehmen, und, nach diesem Maaßstabe gemessen, kann auch diese Darstellung nicht als vollkommne Berichtigung bestehen. Es giebt auch andere Sätze, welche zur Begründung der Parallel-Theorie hinreichend wären, und welchen in Ansehung ihres Anspruchs auf Evidenz der Hindenburg'schen Darstellung um nichts nachstehen. Man verwirft sie aber dennoch, da es ihnen an der vollen Evidenz gebricht. Unter mehreren Sätzen dieser Art nenne ich hier nur folgende:

a) Die Kästner'sche Methode, den XI Grundsatz zu erweisen, wovon oben das Nöthige bemerkt wurde. Mit Zuziehung des ähnlichen Begriffs von der Lage kann man sich auch hier dem Ziele sehr annähern.

b) Wenn man aus dem einen Schenkel eines rechten Winkels eine Linie innerhalb dessen Fläche unter einem spitzen Winkel auf diesen Schenkel zieht, so ist evident bewiesen, daß sich der Theil dieser Linie, welcher am Scheitelpuncte des spitzen Winkels liegt, dem andern Schenkel des rechten Winkels annähere. Sollte man nun daraus nicht auch schließen dürfen, daß diese Linie, bey jeder Verlängerung, der untern näher rücke? Sehr annehmbar scheint das allerdings; besonders wenn man noch die Begriffe von der Lage einer geraden Linie, die durch zwey Puncte bestimmt ist, damit verbindet. Allein als streng erwiesene Wahrheit läßt sich der

Satz

Satz nicht annehmen. (Man sehe hierüber die Bemerkungen im folgenden Abschnitte.)

c) Auf den Endpuncten einer geraden Linie sey eine senkrechte und eine andere unter einem spitzen Winkel gezogen. Aus einem willkührlichen Puncte der letzten fälle man eine senkrechte Linie auf die gegebene, so ist diese mit der ersten senkrechten Linie parallel, und hat in so fern auch einerley Lage gegen die sie schneidende dritte Linie. Da nun der Perpendikel, welcher am nächsten bey dem Scheitelpuncte des spitzen Winkels liegt, dessen andern Schenkel durchschneidet, so könnte man auch (vermittelst der Lage des zweyten Perpendikels gegen den ersten) vielleicht schließen, daß auch der verlängerte zweyte Perpendikel diesen verlängerten Schenkel durchschneiden müsse. Auch dieses scheint sehr annehmbar und ist doch gewiß nicht mit voller Evidenz erwiesen.

d) Läßt sich der Satz, daß es durch einen Punct außerhalb einer geraden Linie nur Eine Linie geben kann, welche mit ihr parallel ist, ebenmäßig mit einer solchen Ueberzeugung darthun, daß nur die strengste Critik im Stande ist, das Unzulängliche und Mangelhafte in diesem Beweise zu entdecken.

Von dieser Art lassen sich wohl noch mehrere Sätze aufzählen, die ich hier, um nicht zu weitläufig zu werden, übergehe.

Siebenzehnter Abschnitt.

Die Theorie

von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

I.

Aeltere Theorie.*)

Ich trete hier als unpartheyischer Critiker meiner eigenen Theorien auf, weil ich mich bey einer schärfern Prüfung derselben selbst überzeugte, daß ich auch den so schwer zu lösenden Knoten nicht löste, und daß es auch bey meiner Darstellung noch etwas zu berichtigen gebe, was nicht mit dem höchsten Grade der geometrischen Evidenz bewiesen worden ist. Meinem Plane getreu will ich daher zuerst eine kurze Darstellung meines Systems voranschicken und nachher die Sätze anfüh-

*) Man sehe: Versuch einer neuen und gründlichen Theorie der Parallellinien. Offenbach am Main 1801. 8.

führen, welche mit größerer Schärfe bewiesen werden müssen, um diese Lehre vollkommen zu berichtigen.

Vordersätze aus Kästners Geometrie.

1.) Durch zwey Puncte geht nur Eine gerade Linie. Also schließen zwey gerade Linien keinen Raum ein.

2.) Wenn zwey gerade Linien zusammenstossen, ohne eine einzige gerade auszumachen, so haben sie nichts gemein, als Einen Punct; verlängert schneiden sie einander in diesem Puncte, so daß von jeder Linie etwas auf beyden entgegengesetzten Seiten des Puncts liegt.

3.) Wenn sich daher zwey Puncte auf entgegengesetzten Seiten einer geraden Linie befinden, so wird dieselbe von einer andern geraden Linie durch eben diese Puncte irgendwo geschnitten. (2).

4.) Nebenwinkel sind zusammengenommen so groß als zwey rechte. Ist einer von ihnen spitz, so muß der andere stumpf seyn und umgekehrt.

5.) Wenn zwey Winkel einen Schenkel mit einander gemein haben, und zusammengenommen zwey rechte betragen, so bilden die beyden andern Schenkel eine einzige gerade Linie.

6.)

6.) Scheitelwinkel sind gleich.

7.) Wenn eine Seite an einem Dreyecke verlängert wird, so ist der äußere Winkel größer, als ein jeder der beyden andern im Dreyeck, welcher dessen Nebenwinkel nicht ist.

8.) In einem Dreyeck, welches einen rechten oder stumpfen Winkel hat, ist jeder der beyden ein spitzer.

9.) Auf eine gegebene gerade Linie giebt es von Einem Puncte ausser ihr und durch Einen Punct in ihr ein Perpendikel; aber nur ein einziges.

10.) In jedem Dreyecke steht der größern Seite der größere Winkel, und umgekehrt dem größern Winkel die größere Seite gegenüber.

11.) Die senkrechte ist von einem Puncte ausser einer Linie auf dieselbe die kürzeste. Daher mißt sie dieses Punctes Abstand von der Linie. Und es giebt auf jeder Seite des Lothes nur Eine Linie aus diesem Puncte, welche mit der gegebenen einen bestimmten Winkel bildet.

12.) Wenn eine Seite nebst einem anliegenden Winkel eines Dreyecks so groß ist, als eben diese Dinge in einem andern Dreyecke, und nebst dem der Winkel, welcher dieser Seite gegen-

übersteht, in beyden Dreyecken einerley ist, so sind dieselben einander gleich und ähnlich.

13.) Dieses nun zum vorausgesetzt, sey BC (Tab. IX. Fig. 10.); eine gerade Linie, und o ein in ihr willkührlich angenommener Punct. Man errichte aus ihm eine senkrechte Linie od auf BC, und mache sie von unbestimmter Länge. Desgleichen lege man in d einen Winkel odm < R, und verlängere dessen Schenkel dm auf beyden Seiten von d nach Belieben, z. B. bis q und p.

14.) Weil sich nach dieser Voraussetzung (13.) der Punct o ganz außerhalb der geraden Linie pq befindet, so ist aus ihm auf diese Linie ein Perpendikel möglich (9.) Ich behaupte, es könne weder in einen Punct der Linie dp, z. B in b, noch selbst in d eintreffen.

15.) Wollte man jenes annehmen, so wäre ∢ obq = R. Allein ∢ odq > ∢ obq (7.), daher müßte ∢ odq > R seyn, welches der Annahme ∢ odq < R (13.) widerspricht. Sollte aber od dieses Perpendikel seyn, so wäre ∢ odq = R, welches der Voraussetzung (13.) ebenfalls zuwider ist.

16.) Daher fällt die senkrechte Linie aus o auf pq in irgend einen Punct der Linie dq. Gesetzt, sie schneide diese Linie in m, so ist ∢ omd = ∢ omq = R und do > mo (10.).

17.)

17) Der Punct m befindet sich wieder ausserhalb der Linie BC; daher kann aus ihm auf diese Linie ein Perpendikel gezogen werden (9.) Ich sage wieder, es könne weder in o, noch in einem Puncte, welcher von o gegen C, etwa in u liegt, in BC einschneiden.

18.) Sollte mo dieses Perpendikel seyn, so wäre $\measuredangle$ mon = R. Allein nach (13.) ist $\measuredangle$ don = R, und nach (16.) muß $\measuredangle$ mon < R seyn, weil m ein Punct ist, der zwischen den Schenkeln des Winkels doB liegt. Daher führt diese Annahme auf den Widerspruch, daß mon ein rechter und ein spitzer Winkel zugleich seyn müßte. Eben so wenig kann diese senkrechte Linie z. B. in u eintreffen; denn nun wäre $\measuredangle$ mun = R, und da der $\measuredangle$ mon > $\measuredangle$ mun seyn muß, (7.), so hätte man $\measuredangle$ mon < R, und dieser Winkel müßte zugleich stumpf und spitz seyn.

19.) Man sieht daher, daß die senkrechte Linie aus m auf BC nothwendiger Weise in die Linie oB, und z. B. in n eintreffen müße. Dieses giebt wieder $\measuredangle$ mno = $\measuredangle$ mnv = R, und daher auch mo > mn (10.).

20.) Aus (16.) ist do > mo, und nach (19.) war mo > mn, daher hat man do > mn. Aber diese Linien do und mn sind aus Puncten der qp senkrecht auf BC (11.). Folglich kann man nunmehr sagen, die Linie pq habe bey d einen größern Abstand von BC, als in m.

21.)

21.) Werden diese Schlüsse in (14 — 24.) auf ähnliche Art weiter fortgesetzt, so ist einleuchtend, daß aus n wieder eine senkrechte Linie qp möglich sey, welche weder in m, noch etwa zwischen m und p fallen, sondern in a eintreffen muß; daß dann wieder aus a ein Perpendikel auf BC denkbar sey, welcher nicht in n, auch nicht zwischen n und C, sondern wieder in v die Linie BC schneiden muß. Ferner ist klar, daß auch wieder av < mn, und an < mo werde; und überhaupt ist eine jede der folgenden senkrechten Linien, welche aus Puncten der einen der beyden gegebenen auf die andere gezogen werden, immer kleiner, als die ihr ähnlich liegende vorhergehende und wird jedesmal noch kleiner, je weiter man diese Operation fortsetzt.

22.) So richtig zwar der bisher geführte Beweis ist, so erstreckt er sich doch einzig auf jene Puncte, welche in der einen Linie durch Perpendikel aus Puncten der andern auf sie bestimmt und nach (14 — 20.) gezogen werden. Allein zwischen d und m, zwischen m und a, u. s. w. können noch sehr viele Puncte angenommen werden, deren Abstände von BC aus dem Bisherinoch nicht bestimmt, und mit den übrigen verglichen werden konnten.

23.) Gesetzt es sey b (Fig. 11.), ein solcher Punct, welcher zwischen a und d liegt. Man ziehe bn senkrecht auf BC, so fällt n nothwendig zwischen y und o. Denn man nehme an,

diese

diese senkrechte Linie treffe in einem dieser Puncte ein, so müßten aus einem jeden derselben zwey Perpendikel auf BC möglich seyn; nämlich va, vb, und od, ob, welches widersprechend ist (11.).

24.) Nun ziehe man von a nach n die gerade Linie an, $\sphericalangle qan < R$; denn $\sphericalangle qao = R$, und an fällt zwischen aq und ao. Daher ist ferner $\sphericalangle nab > R$ (4.), folglich $\sphericalangle abn < R$ (8.) und auch $\sphericalangle abn < \sphericalangle nab$. Dies giebt $bn > an$ (10.). Allein $an > av$ (11.). Daher auch $bn > av$.

25.) Wird ferner die gerade Linie ob gezogen, so ist, weil $\sphericalangle oah = R$, der $\sphericalangle oba < R$ (8.), folglich $< obd > R$ (4.). Da aber $\sphericalangle qdo < R$, so ist auch $\sphericalangle obd > \sphericalangle odb$, und daher $bo < do$ (10.). Aber bo ist wieder $> bn$ (11.), folglich ist auch $do > bn$.

26.) Weil nun die Annahme des Puncts b in (23.) völlig willkührlich war, und der Beweis (23—25.) bey jedem andern Puncte eben so geführt werden kann, so ist hierdurch bewiesen, daß die Abstände aller Puncte, welche Fig. 1. zwischen m und d, zwischen a und m, zwischen g und a, u.s.f. liegen, $< do$ und $> mn$, $< mn$ und $> av$, $< av$, aber $> gh$ u.s.w. seyn müssen.

27.)

27.) Ueberhaupt ist nunmehr durch die Sätze (13 — 26.) außer Zweifel gesetzt, daß bey der Annahme in (13.) die Abstände aller Puncte der Linie dq von BC immer kleiner und kleiner werden, je weiter diese Puncte auf dq von d entfernt liegen; d. h. je weiter dg nach q verlängert wird.

28.) Wenn ∢ abc (Fig. 12.) ein spitzer ist, so befinden sich alle Puncte, welche in ba, dessen einem Schenkel angenommen werden können, außerhalb des Schenkels bc. Daher sind aus jenen Puncten auf diese Linie senkrechte Linien möglich (9.). Gesetzt nun, de sey ein solcher Perpendikel aus d auf bc, so muß, da ∢ deb = R ist, der ∢ bde < R seyn (8.). Daher werden die Abstände der Puncte zwischen d und b um so kleiner, je näher dieselben von d gegen b liegen, und es ist klar, daß der Abstand der Schenkel ab bc in dem Scheitelpuncte = o, seyn müsse. Man kann folglich sagen, der Abstand beyder Schenkel sey in b = o, werde aber immer größer, je weiter man auf dem einen Schenkel fortgeht, bis er in d = de ist.

29.) Nimmt man nun ferner zwischen d und a, z. B. in m einen Punct an, und denkt sich den Perpendikel mn auf bc gezogen, so kann n nicht in e fallen (11.), und ∢ bmn < R (8.). Hieraus folgt aber, daß alle senkrechte Linien, welche zwischen d und m auf bc gezogen werden, größer als de und kleiner als mn seyn müssen

R (27.);

(27.); oder, daß ein jeder Perpendikel auf bc größer, als ein anderer seyn müsse, dessen Anfangspunct in dm näher bey m liegt. Dies heißt nun soviel, als der Abstand aller Puncte zwischen b und m von bc ist um so größer, je näher diese Puncte dem Puncte m liegen.

30.) Da nun die Schenkel des ∢ abc ohne Ende verlängert werden können, so sind auch unzählig viele Perpendikel wie fg, pg, u. s. w. auf bc möglich (9.). Von einem jeden derselben kann bewiesen werden, er sey größer als alle vorhergehende, denn die Sätze in (28, 29.) finden immer wieder ihre Anwendung. Daher sind folgende Sätze bewiesen:

A.) Die Schenkel eines gegebenen spitzen Winkels entfernen sich immer mehr von einander, je weiter dieselben verlängert werden, denn ihr Abstand von einander wird immer größer.

B.) Da der Verlängerung seiner Schenkel nirgends Grenze gesetzt ist, so nimmt auch ihre Entfernung ohne Ende zu, und ihr Abstand kann größer werden, als jede angegebene endliche Linie.

31) Nun sey BC (Tab. X. Fig. 1.) eine gerade Linie. Man errichte in o den Perpendikel od auf BC, und mache ∢ odn = R. Ich behaupte, der Schenkel dn könne, wenn derselbe auch noch so weit gegen n hin verlängert wird, die

die gegen C verlängerte o C niemal durchschneiden. Denn wenn diese Linie d n in die andere o C eintreffen sollte, so müßte dieses aus dem Grunde geschehen, weil ∢ o d n = R angenommen wurde. Wenn man daher an d auf die entgegengesetzte Seite von n auch einen ∢ o d m = R legte, so müßte nothwendiger Weise nun auch die Linie d m irgend einmal die o B durchschneiden. Wenn aber ∢ o d m = R gemacht wird, so liegt m d n in einer geraden Linie (5.), und diese würde, wenn auf beyder Seiten von d o der Schnitt geschehen sollte, mit der andern geraden Linie B C einen Raum einschließen, welches widersprechend ist (1.) Daher kann d n, bey der Annahme ∢ o d n = R, mit o C niemal zusammenlaufen.

32.) Setzt man ∢ o d n = R, und verlängert n d gegen m hin, so entsteht auch auf dieser Seite ein rechter Winkel o d m (4.) und d m, gegen m verlängert, wird nie in o B eintreffen können.

33.) Wenn daher eine gerade Linie m n so an d gelegt wird, daß ∢ o d m, oder, welches einerley ist, ∢ o d n = R ist, so kann diese Linie, wenn sie auch noch so weit zu beyden Seiten verlängert wird, die gegen B und C verlängerte B C niemal erreichen.

34.) Es ist daher bewiesen, das es wirklich gerade Linien in einerley Ebene giebt, welche die

Eigenschaft haben, daß sie sich, wenn sie gleich noch so weit zu beyden Seiten verlängert werden, doch nie einander durchschneiden können (32.). Heißt man solche Linien parallele oder gleichlaufende Linien, so kann man nunmehr folgenden Satz von ihnen festsetzen: Wenn zwey gerade in einerley Ebene sich befindliche Linien von einer dritten so durchschnitten werden, daß die Winkel, welche an den Durchschnittspuncten liegen, rechte sind, so sind diese Linien parallel oder gleichlaufend.

35.) Nun seyen ab und cd, (Fig. 2.) zwey gerade Linien, welche von einer dritten ac in den Puncten a und c so durchschnitten werden, daß ∢ bac = ∢ dca = R, so ist ab par. cd (33.). Nimmt man nun in der einen z. B. in ab einen Punct m willkührlich an, und zieht eine senkrechte Linie aus ihm auf die andere cd, so behaupte ich, dieser Perpendikel mn könne nicht > ac seyn Denn man nehme einmal an, mn > ac, so müßte wenn nm so auf ac gelegt würde, daß n in c fällt, der Punct m über a in die verlängerte ca und z. B. in p fallen. Weil sich nun dieser Punct p außerhalb der Linie ab befindet, und wegen der Annahme ∢ bac = R, auch ∢ bap = R seyn muß (4.), so bildet eine von p in m gezogene gerade Linie ein rechtwinklichtes Dreyeck pam. Daher muß ∢ map < R seyn (8.). Wenn aber dieses ist, so wird nach (27.) pc > mn. Daher führt die Voraussetzung mn > ac auf den Widerspruch

mn = pc

$mn = pc$ und $mn < pc$, und muß daher falsch seyn.

36.) Weil eine Größe, welche nicht größer als eine andere seyn kann, entweder ihr gleich oder kleiner als sie seyn muß, und die Annahme des Puncts m in (34) völlig willkührlich war, so ist nunmehr bewiesen, daß alle Perpendikel, welche aus Puncten der einen Parallellinie auf die andere gefällt werden, entweder so groß als die sie schneidende Linie, welche mit beyden rechte Winkel bildet, oder kleiner als dieselbe seyn müssen. Wenn daher in einem Puncte g, der zwischen c und n liegt, eine senkrechte Linie $gf > ac$ errichtet wird, so muß dieselbe ihren Endpunct f oberhalb der Linie ab haben. Daher ist gf durch die ab hindurchgegangen, und jene muß diese in irgend einem Puncte geschnitten haben, der zwischen f und g, z. B. in q sich befindet (3.).

37.) Auf der geraden Linie am (Fig. 3.) stehe ab senkrecht. In m liege ein $\measuredangle\, ami < R$. Ich sage, der verlängerte Schenkel mi werde die Linie ab einmal durchschneiden müssen. Um dieses zu zeigen, mache man $\measuredangle\, amd = R$, so ist md par. ab (33.), und alle Puncte des Schenkels md, den Scheitelpunct m ausgenommen, liegen unterhalb der Linie mi. Die $\measuredangle\, ami < R$, und $\measuredangle\, ami + \measuredangle\, imd = R$, so muß auch $\measuredangle\, imd < R$ seyn. Werden daher in dessen Schenkel mi, und seiner Verlängerung die Puncte h, i, r, f, u. s. f. angenommen,

men, und aus ihnen die Perpendikel he, io, rt, fq, u. s. w. auf md gezogen, so muß es irgend einen unter ihnen geben, der > am ist, (30, B.). Gesetzt er sey z. B. fg, so muß nunmehr auch der Punct f über der Linie ab liegen (35.). Allein der Punct m liegt unterhalb ab. Also giebt es wirklich in dem verlängerten Schenkel mi irgendwo einen Punct f, welcher sich oberhalb der Linie ab befindet; daher muß diese verlängerte mi die ab (etwa auch in ihrer Verlängerung) gewiß irgendwo durchschneiden (3.).

38.) Zur größern Erläuterung von (36.) muß hier noch folgender Satz bewiesen werden. Wenn man in der mit ab parallelen md nach Belieben Puncte, wie e, o, t u. s. w. annimmt, und aus ihnen auf md senkrechte Linien errichtet, so müßen diese, wenn sie aufwärts gehörig verlängert werden, die Linie ab durchschneiden. Denn wenn q der Punct ist, woraus ein Perpendikel auf md errichtet werden soll, so trage man mq aus a auf ab, z. B. bis p, und fälle nunmehr aus p eine senkrechte Linie auf md. Diese wird unter der von q gegen c, z. B. in t, oder in q selbst oder von q nach d etwa in g, auf md eintreffen. Soll nun das Erste geschehen, so wäre ∢ ptm = ∢ tma = R, daher pt ⧺ am, und man hätte, weil mt < mq, nun auch ap > mt, welches doch wegen (34, 35.) widersprechend ist. Hätte das Zweyte statt, so ist pq dieser Perpendikel selbst, und der Satz ohnehin bewiesen. Setzt man daher das Dritte, so

so muß eine auf md aus q errichtete senkrechte Linie, da sie, wegen ∢ pgm = R, die pg in keinem Puncte durchschneiden kann, nothwendig zwischen a und p in ab eintreffen. Ist dieses nun bewiesen, so muß auch ein Perpendikel aus g die ab durchschneiden. Nun ist aber gf > ma (aus dem Vorhergehenden), folglich muß der Punct f oberhalb der Linie ab fallen, u. s. w.

Prüfung dieser Theorie.

Wenn man diese Darstellung der Parallel-Theorie mit einem kritischen Auge durchschaut, so zeigen sich auch hier einige Unvollständigkeiten, welche erst völlig berichtigt seyn müssen, ehe man ihr den Werth eines evidenten Systems zugestehen kann. Die beyden Sätze nämlich, deren Beweise nicht in der strengsten geometrischen Form geliefert sind, betreffen die Behauptungen in (27.) und (30.).

Zuerst von dem Satze (27.). Daß die Puncte, m, a, g, t, (Tab. IX. Fig. 10.) welche durch die Perpendikel om, mn; na, av; vg, gh und gh, ht bestimmt sind, der Linie BC in der genannten Ordnung immer näher liegen, ist ohne Widerrede bewiesen. Eben so evident

dent

dent ist es es auch, daß jeder Perpendikel, welcher aus willkührlichen Puncten zwischen d und t auf B C gefällt wird, kleiner als d o und größer als t f seyn müsse. Da nun aus f wieder neue Perpendikel auf ähnliche Weise, wie die vorigen gezogen werden können, welche in Puncten von t gegen q auf der verlängerten d t eintreffen müssen, so ist es auch mit gleicher Evidenz dargethan, daß es auf dieser gegen q verlängerten d t immer Puncte gebe, welche sich weiter von d entfernen und von der B C stets einen kleinern Abstand haben. Da diesem gegenseitigen Perpendikel-Fällen auch durch nichts eine Grenze gesetzt ist, so ist man sogar berechtigt zu behaupten, man könne auf der t q (oder ihrer Verlängerung) Puncte bestimmen, welche sich ohne Ende von dem Puncte d mehr entfernen, und deren Abstand von B C ebenfalls ohne Ende verringert wird. So unwidersprechlich Alles dieses bewiesen ist, so darf man sich hier doch die Frage nicht verheimlichen, ob das bloße Annähern des Puncts t gegen den Punct q auf der d q allein schon hinreichend sey, diesen Punct q wirklich einmal zu erreichen; oder ob außer dieser Annäherung zugleich auch das Verhältniß bekannt seyn müsse, nach welchem dieselbe geschieht. Da hier selbst die Parallellinien einen Fall zeigen, daß eine gerade Linie ohne Ende größer werden könne, ohne je die Größe einer gegebenen endlichen geraden Linie zu erreichen, so ist man auch nicht befugt, aus dem Größerwerden ins Unendliche

auf

auf das Erreichen einer bestimmten endlichen Größe so ganz unbedingt zu schließen.

Zur Erläuterung denke man sich, (Tab. X. Fig. 3) von c nach a eine gerade Linie ca, welche mit der untern Parallele cd den spitzen ∠ acd bildet. Nimmt man nun auf der obern Parallele ab nach Belieben die Puncte p, b u. s. f. an, und zieht aus c immer die geraden Linien cp, cb so werden alle diese Linien die am durchschneiden, und jede der folgenden muß in ihr einen Durchschnittspunct, der näher bey m liegt, als der vorhergegangene haben. Da nun die Annahme der Puncte auf der verlängerten ab ins Unendliche statt findet, so giebt es auch von a nach m auf der am Durchschnittspuncte, welche sich ins Unendliche dem Puncte m nähern, ohne ihn je einmal zu erreichen, weil sonst die obere Parallele die untere schneiden müßte, welches unmöglich ist.

Es ist also klar, daß aus dem bloßen Näherrücken des Puncts t (Tab. IX. Fig. 10.) gegen den auf der verlängerten dt willkührlich angenommenen Punct q noch nicht evident gefolgert werden könne, daß t einmal wirklich jenseits q eintreffen müsse. Der Satz in (27.) ist folglich nicht so allgemein bewiesen, wie er in (34.) als Hülfssatz angewendet wird.

Eine ähnliche Betrachtung läßt sich auch hierbey über das Kleinerwerden der Perpendi-

dikel anstellen, welche aus Puncten der gegen q verlängerten dt auf die vorerwähnte Weise nach BC gezogen werden. Könnte man aus dem Kleinerwerden einer endlichen geraden Linie ins Unendliche einmal auf ihr gänzliches Verschwinden schließen, so müßten die Perpendikel aus tq auf CB auch einmal = o werden, die verlängerte tq würde in die verlängerte CB wirklich eintreffen, und die Schwierigkeit der Parallel-Theorie wäre verschwunden. Allein auch dieser Schluß ist zu voreilig, und es lassen sich wirklich Größen denken, welche nicht verschwinden, ob sie gleich eine Abnahme ins Unendliche erleiden, wie dieses aus der vorigen Darstellung ersichtlich ist, wenn man sich jene Theile der Linie am denkt, welche zwischen den dortigen Durchschnittspuncten in am und dem Puncte m liegen.

So lange also für das Fortrücken der Puncte m, a, g, t und der folgenden auf der geraden dq kein bestimmtes Verhältniß nachzuweisen ist, wonach es sich richtet, so lange muß der Satz in (27.) immer dem angeführten Zweifel ausgesetzt bleiben, obgleich es immer noch zu versuchen ist, diese kleine Lücke auf eine andere befriedigende Art zu ergänzen.

Was nun die Behauptung in (30.) betrifft so kann man selbst bey der Annahme, daß (Fig. 12.) $de < mn$, $mn < fg$, $fg < pq$, u. s. f. sey, doch noch nicht folgern, daß die Entfernung der Schenkel des spitzen Winkels abc einmal die

Größe

einer jeden angegebenen endlichen Linie übersteigen werde. Denn eine kleinere Linie kann, wie dieses oben bemerkt worden ist, ohne Ende größer werden, ohne je einmal die Größe einer gegebenen geraden Linie zu erreichen. Es bedarf also keiner weitern Erinnerung, daß auch dieser Satz nicht mit gebührender Strenge erwiesen sey.

So wäre denn gezeigt, daß auch diese Theorie, gleich den übrigen, den Namen einer evidenten Berichtigung der Parallelen nicht verdiene.

Um jedoch diese Darstellung nach Möglichkeit zu verbessern, will ich hier einen evidenten Beweis dieses letztern Satzes (30.) mittheilen. Hierdurch wird meine Theorie theils an Vollständigkeit gewinnen, theils glaube ich auch, daß der Satz an sich, der bisher noch von keinem Geometer streng bewiesen worden ist, als ein nicht unwichtiger Beytrag zu einer künftigen Berichtigung dieser schwierigen Lehre angesehen werden könne.

§. 1. Lehrsatz.

Wenn man in jedem Schenkel eines rechten Winkels zwey willkührliche Puncte annimmt, so haben jene von ihnen, welche vom Scheitelpuncte weiter entfernt sind, einen grössern

fern Abstand von einander, als die zwey andern, die sich näher bey dem Scheitel befinden.

Es sey, (Tab. X. Fig. 4.) ∢ A = R, AF > AD und AG > AE, so ist auch FG > DE.

Beweis.

Wenn man die FE zieht, so ist FE > DE, und FG > FE; folglich muß um so mehr FG > DE seyn.

§. 2. Zusatz.

Es sey (Fig. 5.) ∢ A = R. Man nehme auf beyden Schenkeln AB und AC die gleichen Stücke Ai = ik = kl = Aa = ab = bc u. s. w., und ziehe die geraden Linien ai, bk, cl u. s. f., so ist ai < bk; bk < cl; cl < dm u. s. w. (§. 1.), und die Schenkel AB und AC des ∢ A werden sich, je weiter sie verlängert werden, immer mehr und mehr von einander entfernen.

§. 3. Zusatz.

Man halbire, nunmehr den ∢ A durch die gerade AD, so sind die △△ Aar, Air; Abs, Aks; Act, Alt u. d. f. gleich und ähnlich; bey r, s, t, u. s. f. sind rechte Winkel, und es ist

ar

ar = ir; bs = ks, ct = lt u. s. w. Da nun die Linien ai, bk, cl u. d. f. immer größer werden (§. 2.), so wachsen auch ihre Hälften ar und ir; bs und ks; ct und lt u. s. w. immer mehr und mehr. Diese senkrechten Linien messen aber den Abstand der Puncte a, b, c .... und i, h, l .... von der AD. Folglich wird sich die AB oder die Al, welche mit der AD einen ∠ A = ½ R bilden, immer weiter und weiter von derselben entfernen, je mehr sie verlängert werden.

§. 4 Zusatz.

Eine Linie, welche in der Progression Ai, 2 Ai, 3 Ai, 4 Ai .... ohne Ende zunimmt, übersteigt nothwendiger Weise einmal jede angegebene endliche Linie. Nimmt man nun in AC und AB die Theile Ai, Aa, ik, ab, kl, bc u. s. f. immer von gleicher Größe, so müssen es einmal zwey derselben geben, welche jede gegebene endliche Linie übersteigen. Sie seyen z. B. Ao und Af. Da nun fo > Ao; so ist auch diese fo größer als die gegebene Linie. Daher kömmt man durch Linien, welche nach (§. 2.) von dem Schenkel AB zu dem Schenkel AC gezogen werden, einmal auf solche, welche jede angegebene Linie übersteigen.

§. 5. Zusatz.

Für jede gegebene endliche Linie giebt es auf AC ein Vielfaches von Ai, welches größer als die-

diese Linie ist. Man setze, dies sey das nfache von Ai, so wird die Hypothenuse, welche von der nfachen Ai auf AC zur nfachen Ai auf AB gezogen wird auch größer, als diese endliche Linie seyn. Nun nehme man auf AC und AB das 2nfache von Ai, und ziehe wieder eine zweyte Hypothenuse, so ist diese größer als das Doppelte dieser endlichen Linie. Daher muß auch ihre Hälfte größer als diese endliche Linie selbst seyn. Diese Hälfte ist aber eine senkrechte Linie von einem Puncte der AC oder der AB auf AD, und mißt den Abstand dieses Puncts von der AD. Daher ist folgender Satz bewiesen:

Wenn man die Schenkel eines halben rechten Winkels immer weiter verlängert, so wird ihr Abstand einmal so groß werden, daß er jede angegebene endliche Linie an Größe übersteigt;

oder:

Wenn man eine kleine Linie zur Einheit annimmt, so giebt es ein Mehrfaches von ihr, welches auf einen Schenkel des halben rechten Winkels getragen, einen Punct bestimmt, aus dem ein Perpendikel auf den andern Schenkel größer wird, als jede endliche Linie.

§. 6.

§. 6. Zusatz.

Wenn ∢ A (Fig. 6.) = $\frac{1}{2}$R, so giebt es auf AC einen Punct B, wo ein Perpendikel BE auf AD größer als jede gegebene endliche Linie wird (§. 5.). Hier ist AB > AE. Nimmt man daher AF = AB, und zieht die FB, so ist FB > BE; folglich auch FB um so mehr größer, als die gegebene endliche Linie. Setzt man nun diese endliche Linie noch einmal so groß, so giebt es nach (§. 5.) wieder einen Punct L, aus welchem ein Perpendikel LG auf AD größer, als diese doppelte endliche Linie ist. Dieser Punct L muß offenbar weiter von A entfernt seyn, als B. Hier ist wieder AL > AG. Wenn man daher AH = AL setzt, und die LH zieht, so ist LH > LG und diese LH muß um so mehr größer seyn, als die doppelte gegebene endliche Linie. Nun halbire man ∢ A durch AM, so sind bey N vier rechte Winkel, und es ist LN = HN. Nun ist aber LH größer als die doppelte gegebene endliche Linie, folglich muß die halbe LH, d. h. die LN größer als die einfache gegebene endliche Linie seyn. Allein diese LM mißt den Abstand des Puncts L von der AN. Daher kömmt man bey dem halben ∢ A, oder bey $\frac{1}{4}$R auf Puncte in dem einen Schenkel, welche von dem andern weiter abstehen, als jede anzugebende Linie beträgt.

§. 7.

§ 7. Zusatz.

Nun setze man (Fig. 7) den ∢ A = $\frac{1}{4}$R. so giebt es auf dem Schenkel AC einen Punct, welcher von der AM weiter entfernt ist, als jede endliche Linie (§. 6.). Dieser Punct sey B, und BE der Perpendikel aus ihm auf AM. Man nehme jetzt AF = AB, und ziehe BF, so ist BF > BE, und folglich diese BF um so mehr größer als die angegebene Linie. Nimmt man nun diese endliche Linie doppelt, so giebt es für dieses Doppelte einen andern Punct L, wo der Perpendikel LG auf AM größer als dieses Doppelte wird. Man setze AH = AL, und ziehe LH, so ist auch diese LH größer als das Doppelte der endlichen Linie. Nun halbire man den ∢ A durch die gerade AQ, so sind bey N rechte Winkel, und es ist LN = HN. Allein LN ist die Hälfte einer Linie, welche größer als das Doppelte der angegebenen endlichen Linie ist. Folglich ist diese LN selbst größer als die gegebene endliche Linie. Diese LN mißt aber den Abstand des Puncts L von der AM. Daher werden sich auch die Schenkel des ∢ A = $\frac{1}{4}$R so von einander entfernen, daß ihr Abstand einmal größer, als jede anzugebende endliche Linie ist.

§. 8. Zusatz.

So wie die bisherigen Schlüsse von R auf $\frac{1}{2}$R; von $\frac{1}{2}$R auf $\frac{1}{4}$R; von $\frac{1}{4}$R auf $\frac{1}{8}$R ausge-

dehnt

dehnt wurden, so kann man sie für die folgenden Winkel $\frac{1}{16}$ R, $\frac{1}{32}$ R, $\frac{1}{64}$ R u. s. f. immer weiter fortsetzen. Durch diese Halbirung kömmt man aber nothwendig einmal auf einen Winkel, der kleiner als jeder angegebene ist. Daher ist folgender Satz bewiesen:

Die Schenkel eines jeden spitzen Winkels (so klein er auch seyn mag) werden sich immer weiter von einander entfernen, so daß ihr gegenseitiger Abstand einmal die Größe einer jeden anzugebenden Linie übersteigt.

II. Neuere Theorie.

Die Theorie, welche ich in den folgenden Sätzen mittheile, ist neuer, als die vorige und in einem Aufsatze enthalten, welchen ich der Departemental-Gesellschaft der Wissenschaften und Künste zu Mainz überschickte. Sie stützt sich auf den 27sten Satz der ältern Theorie, und kann daher auch auf den Rang einer vollendeten Berichtigung keinen Anspruch machen. Ich gönne ihr deshalb hier eine Stelle, weil sie eigenthümlich ist, und einen neuen Weg darbietet, der zur Erkenntniß der Wahrheit führt. Vielleicht gelingt

es einem Andern, das Mangelhafte zu ergänzen, und diese Darstellung zur strengen Evidenz zu erheben.

§. 1. Lehrsatz.

Es sey (Fig. 8.) ∢ abc = R, v ein in seinem Schenkel ba willkührlich angenommener Punct, und vn ein Perpendikel auf bc, so wird, wenn vh = bv gemacht und hp senkrecht auf bc gezogen wird, die nd nicht kleiner als bn seyn können.

Beweis.

Man verlängere nv aufwärts, und fälle aus h einen Perpendikel hm auf no, so ist (nach 27. der ält. Theorie) hm < pn, oder hm = pn. Aber da vh = vb, ∢ hvm = ∢ bvn, und ∢ vmh = ∢ vnb = R, so ist Δ vmh = Δ vnb, und hm = nb. Folglich auch pn = nb, oder pn > nb.

§. 2. Zusatz.

Nimmt man (Fig. 9.) hf = bh, so wird, wie (§. 1.) bewiesen, daß gp = pb, oder gp > pb sey. Nun ist aber bf = 4 x bv, und bg = 4 x bn oder > 4 x bn, folglich wird nun auch für 2 x bf = 8 x bv in ba, eine Linie in bc entstehen, welche = 2 x bg = 8 x bn, oder > 8 x bn seyn wird, d. h. so oft die Linien

bv,

bv, bh, bf, u. s. f. nach der Progression 1, 2, 4, 8, 16 .... zunehmen, werden die ihnen zugehörigen Abschnitte bn, bp, bg, u. s. w. in eben dieser Progression, oder in einer noch grössern wachsen.

§. 3. Lehrsatz.

Wenn a und b zwey gleichartige Größen sind, und $a > b$ ist, so giebt es, wenn b nach der Progression 2b, 4b, 8b, 16b, 32b u. s. f. ohne Ende zunehmen kann, in dieser Reihe irgend einmal ein Vielfaches von b, welches $> a$ ist.

Beweis.

Weil sich b mit a vergleichen läßt, so setze man $\frac{a}{b} = q$, wo denn q entweder eine reine ganze Zahl, oder eine ganze Zahl nebst einem eigentlichen Bruche seyn muß, welcher $< b$ ist. Hier ist nun immer $b \times q = a$. Allein, da b in dem obigen Verhältnisse zunimmt, so giebt es in dieser Reihe gewiß einmal ein Vielfaches von b, welches größer als das qfache von b ist, und dieses muß denn auch größer als a seyn.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn $\measuredangle$ abc, (Fig. 10.) $<$ R, und in d, einem auf bc willkührlich ange-

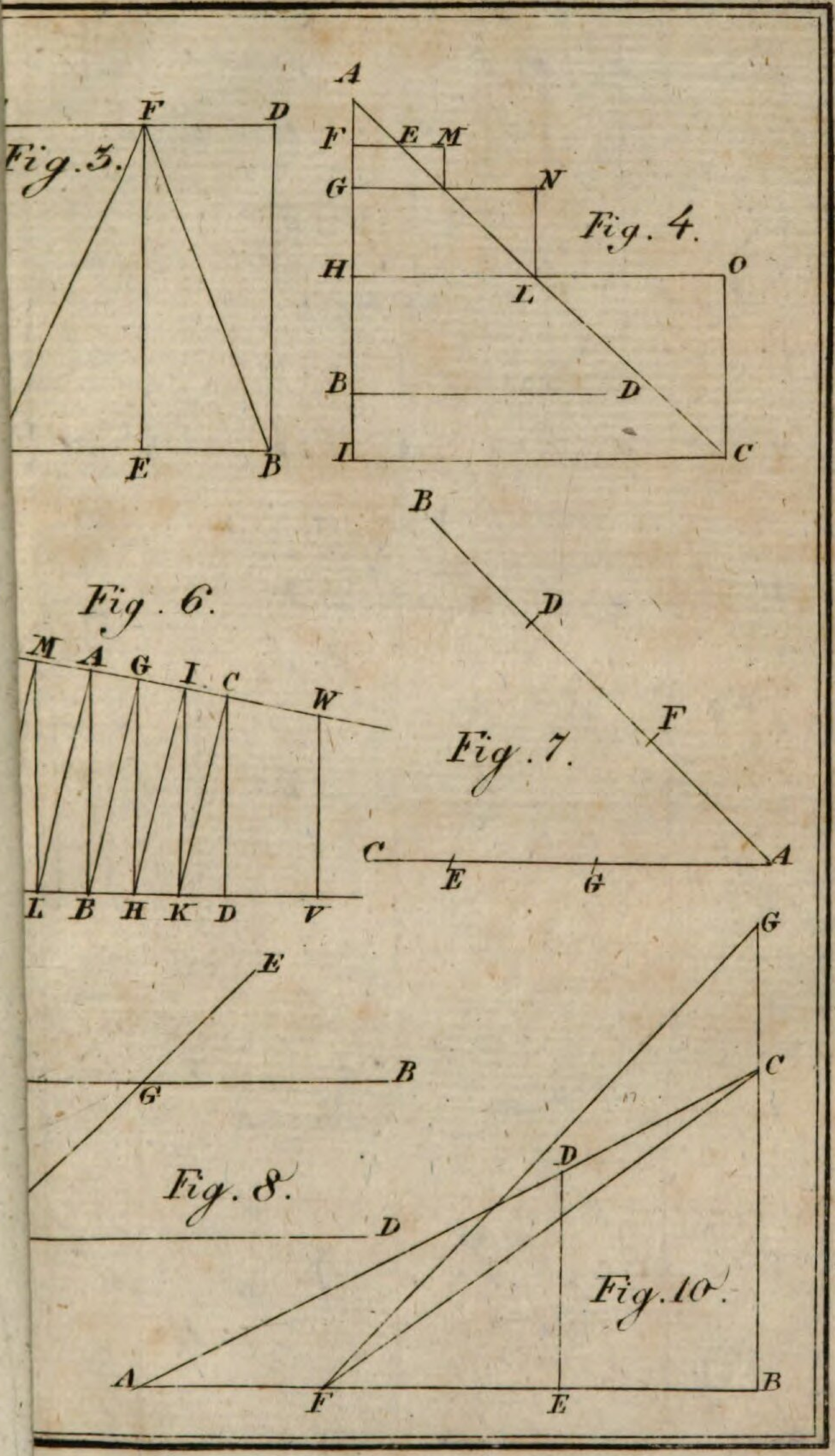
genommenen Puncte, ein Perpendikel dg errichtet wird, so muß dasselbe, wenn es gehörig verlängert wird, den andern Schenkel ab einmal durchschneiden.

Beweis.

Man ziehe aus einem nach Belieben in ba, z. B. in v, gewählten Puncte die vn senkrecht auf bc, so ist bn eine Linie, welche mit bd verglichen werden kann. Denn diese bn ist immer eine Linie und die bd kann nach der Progression $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \ldots$ abnehmen, und muß einmal kleiner als bn werden. Da wo dieses geschieht, läßt sich auch angeben, durch wie viele Halbirungen dieses geschehen ist; d. h. das Verhältniß von der bn gegen die bd ist bestimmbar.

Nun mache man vh = bv; hf = bh u. s. w. und ziehe aus den Endpuncten dieser Linien die Perpendikel cp, fr, u. s. w. so wird man nach (§. 3.) einmal eine Linie wie br bekommen, welche größer, als bd ist. Aber jetzt fällt der Punct d zwischen r und b, und ein aus d errichtetes Perpendikel aus bc muß, da er weder in f eintreffen, noch die fr irgendwo schneiden kann, zwischen f und b in bf eintreffen, d. h. die verlängerte dg muß die ba durchschneiden.

Ende des ersten Theils.


F D
Fig. 3.
E B
A
F E M
G N
Fig. 4.
H O
L
B D
I C
Fig. 6.
M A G I C W
L B H K D V
B
D
F
Fig. 7.
C A
E G
E
B
G
Fig. 8.
D
G
C
D
Fig. 10.
A F E B

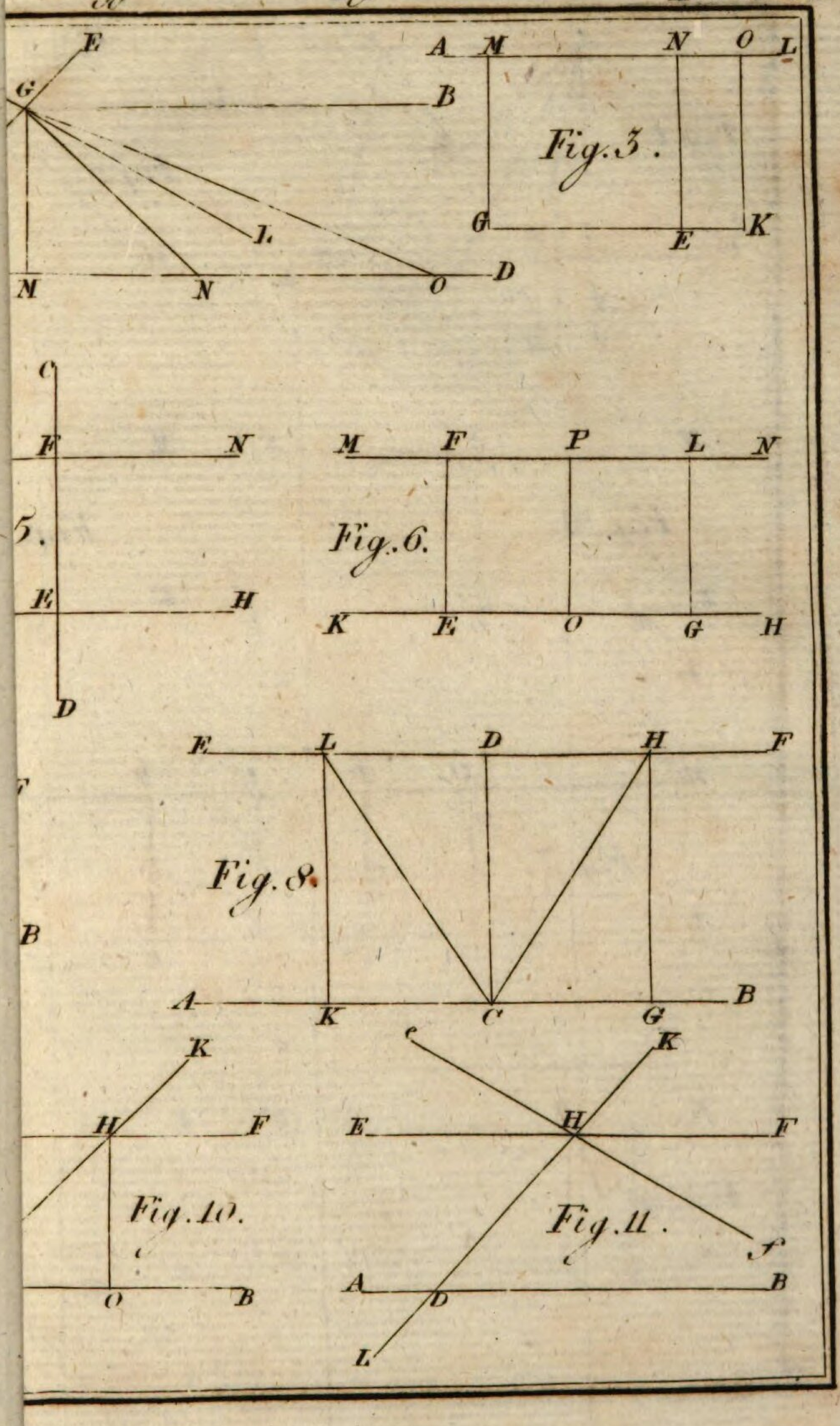


Fig. 3.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 10.
Fig. 11.

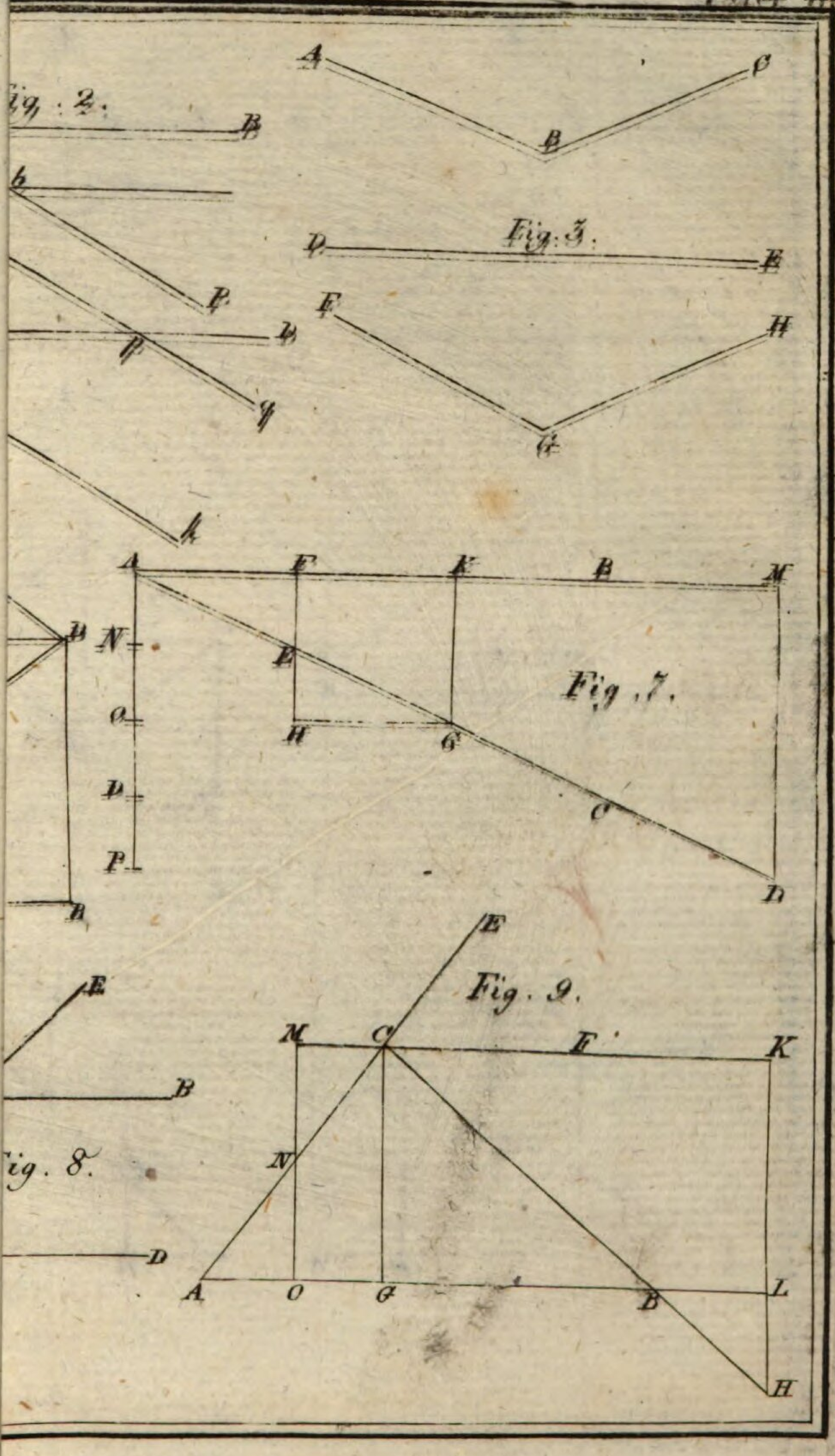


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

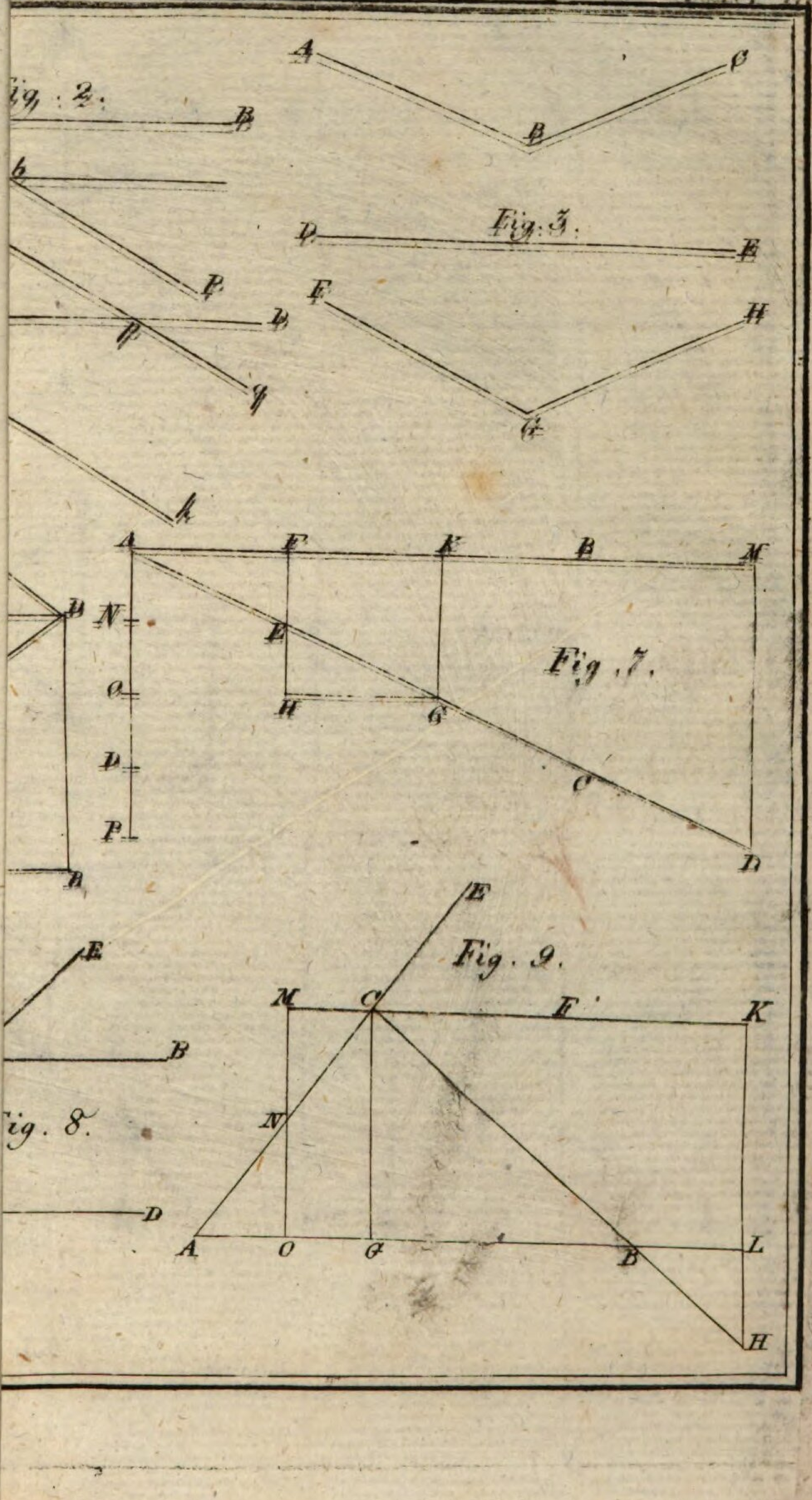


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
A
B
C
D
E
F
G
H
K
L
M
N
O
P

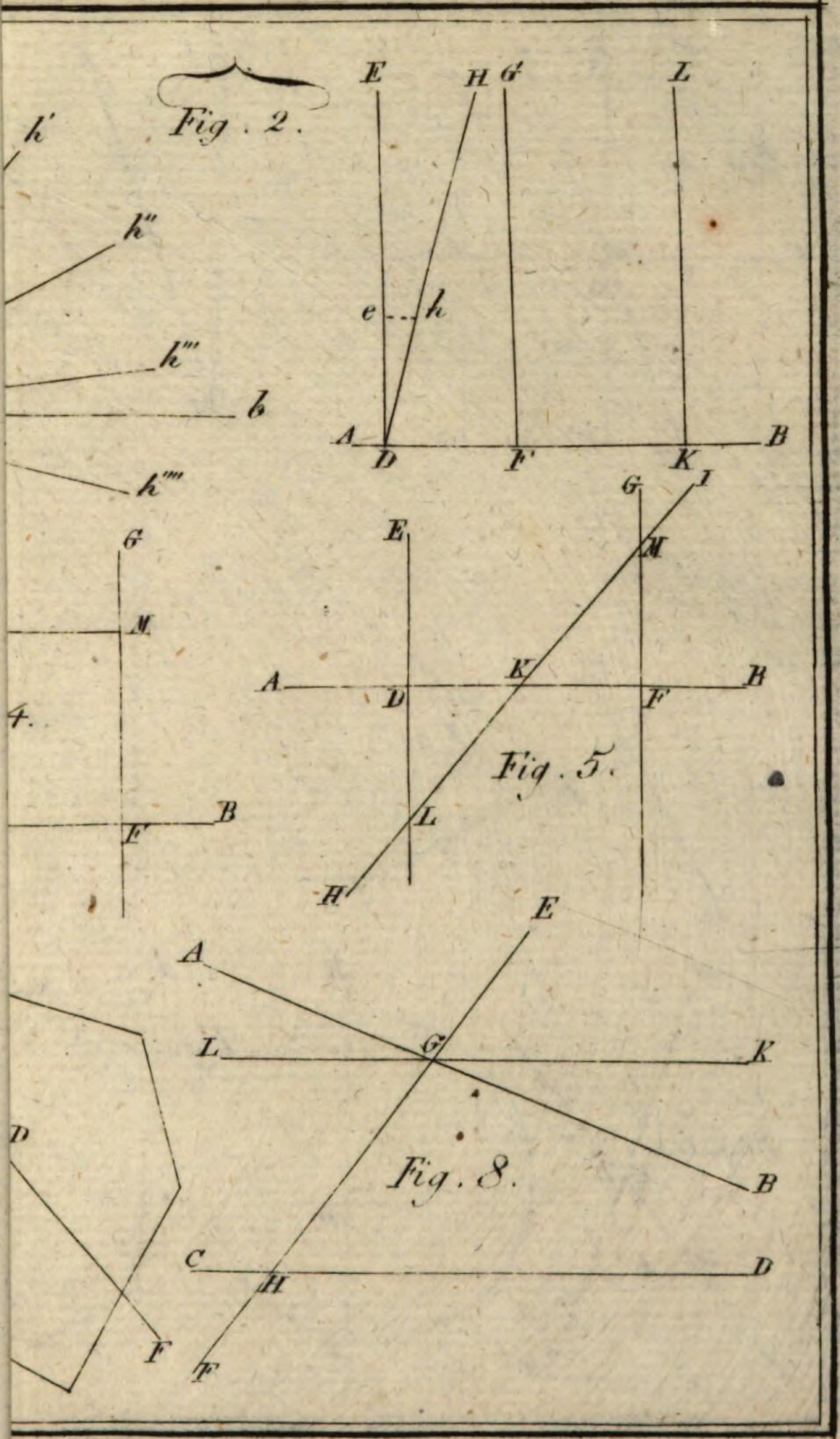


Fig. 2.
E
H
G
L
e
h
A
D
F
K
B
h'
h''
h'''
b
h''''
G
M
4.
B
F
Fig. 5.
G
I
E
M
A
K
B
D
F
L
H
Fig. 8.
E
A
L
G
K
B
C
H
D
F
D
F

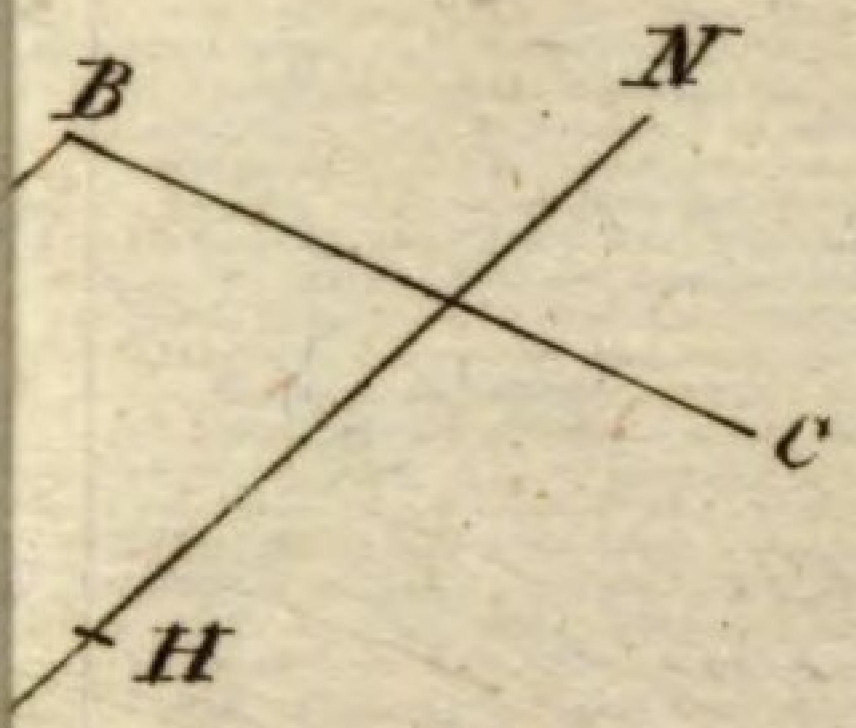


Fig. 3.

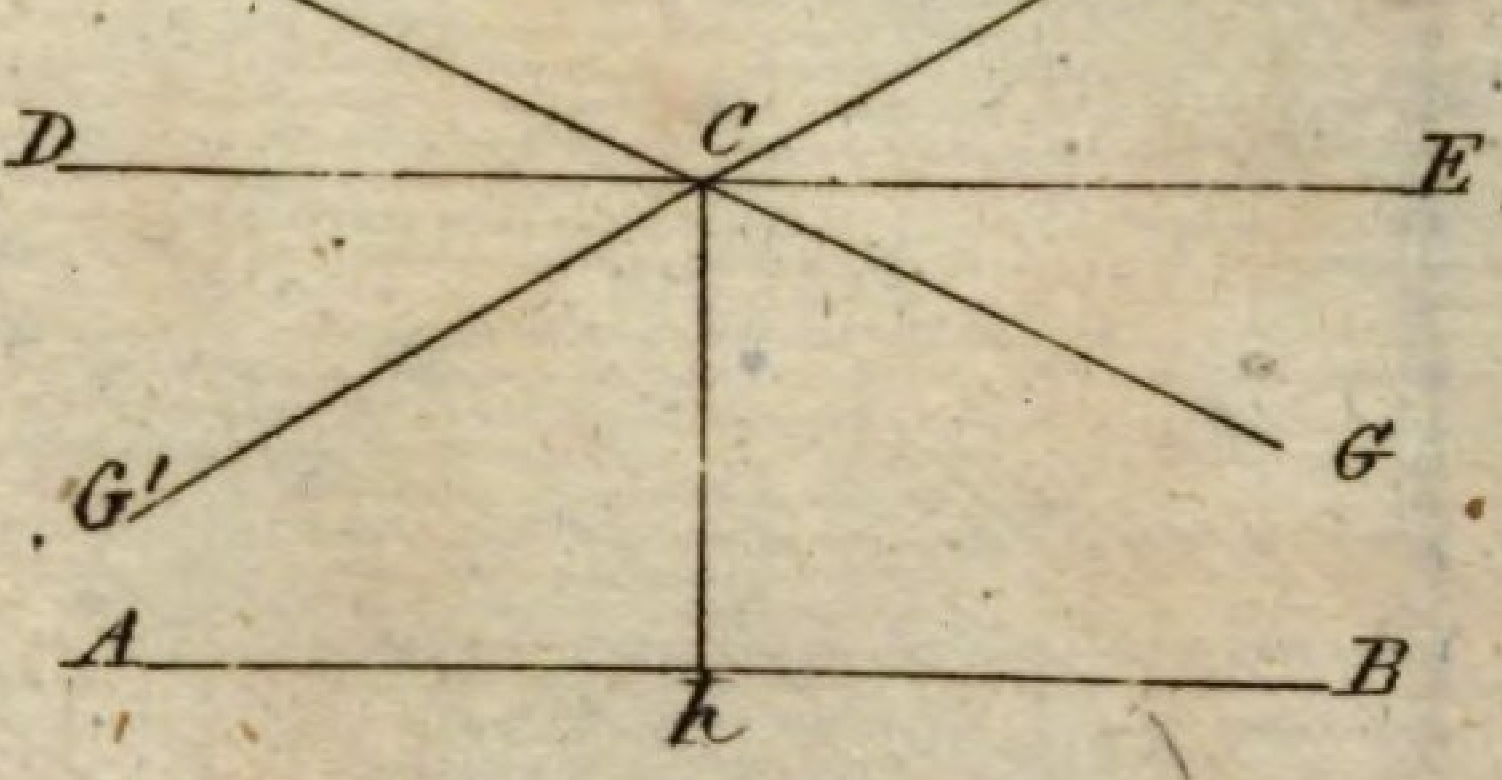


Fig. 5.

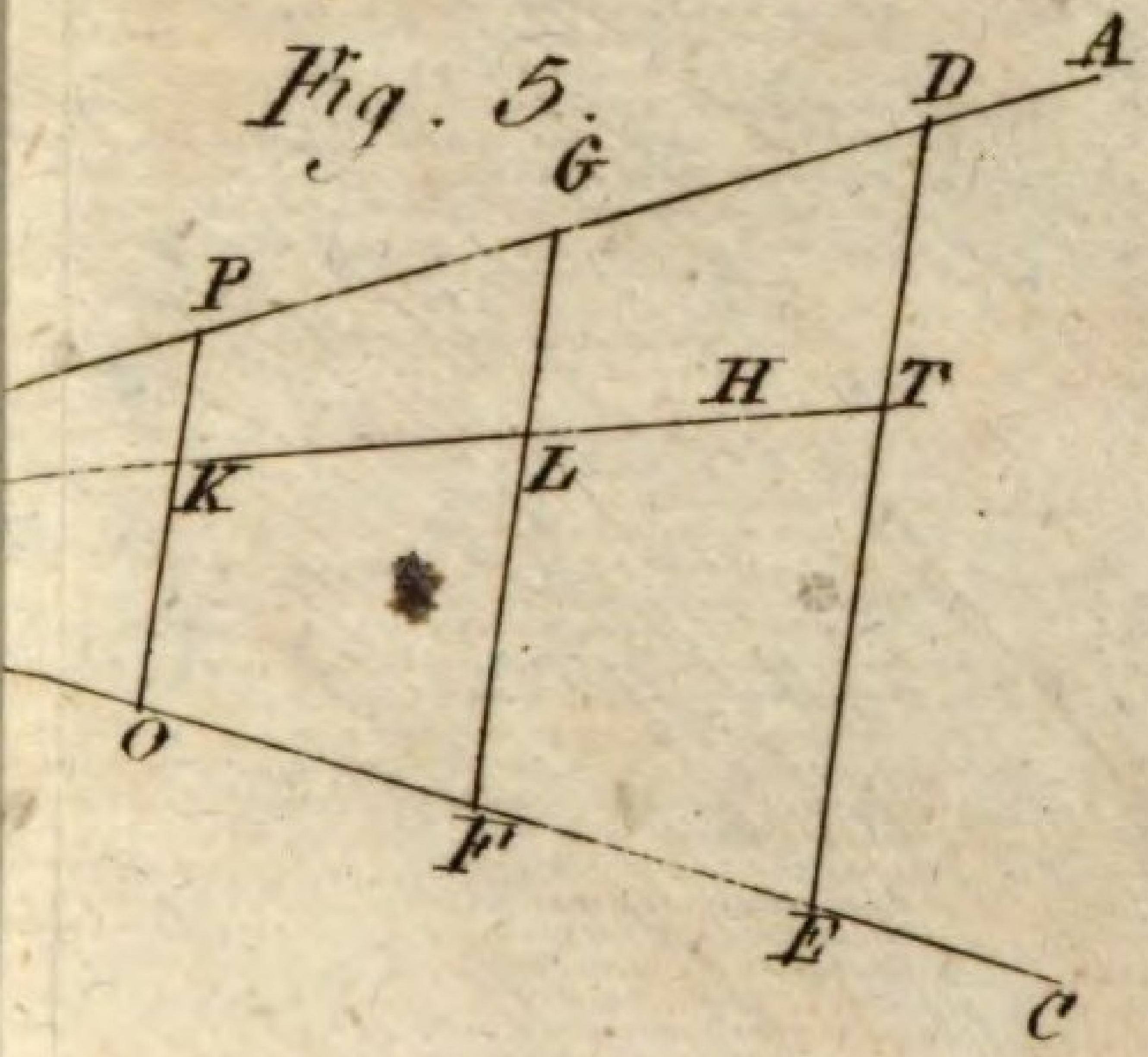


Fig. 8.

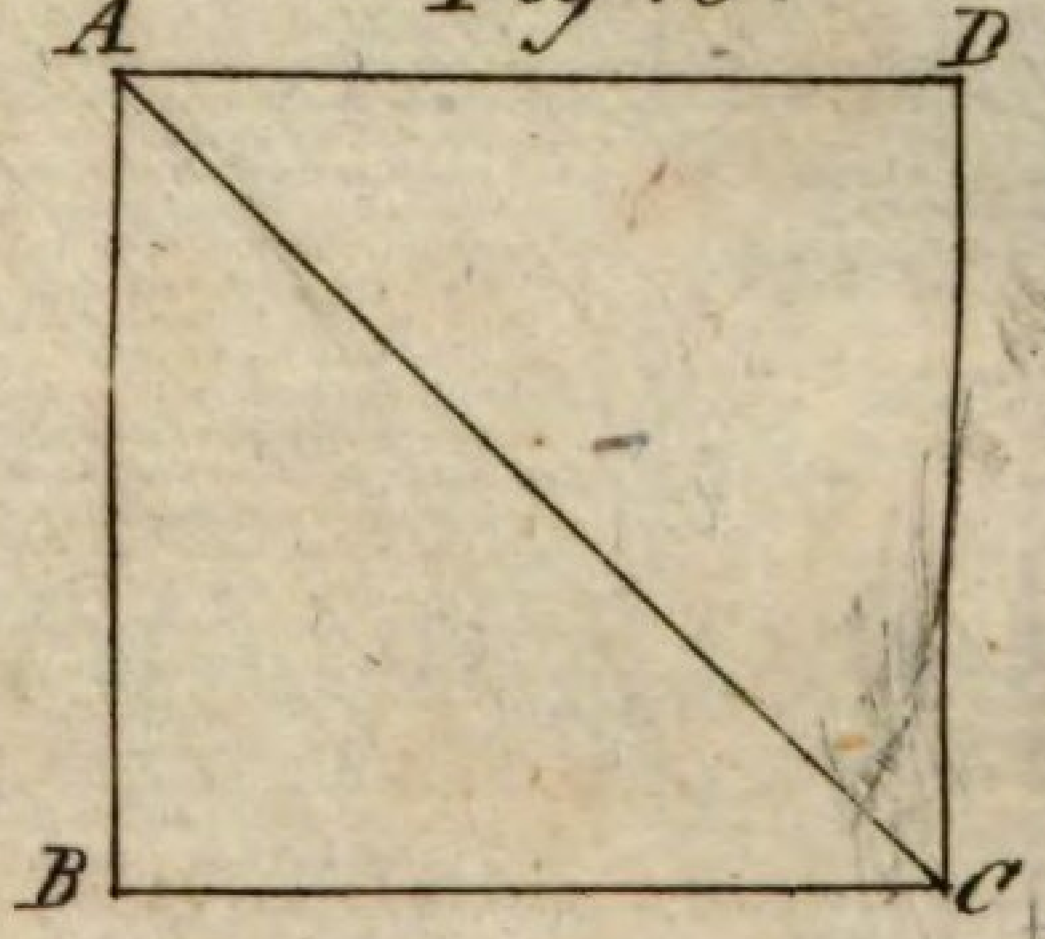
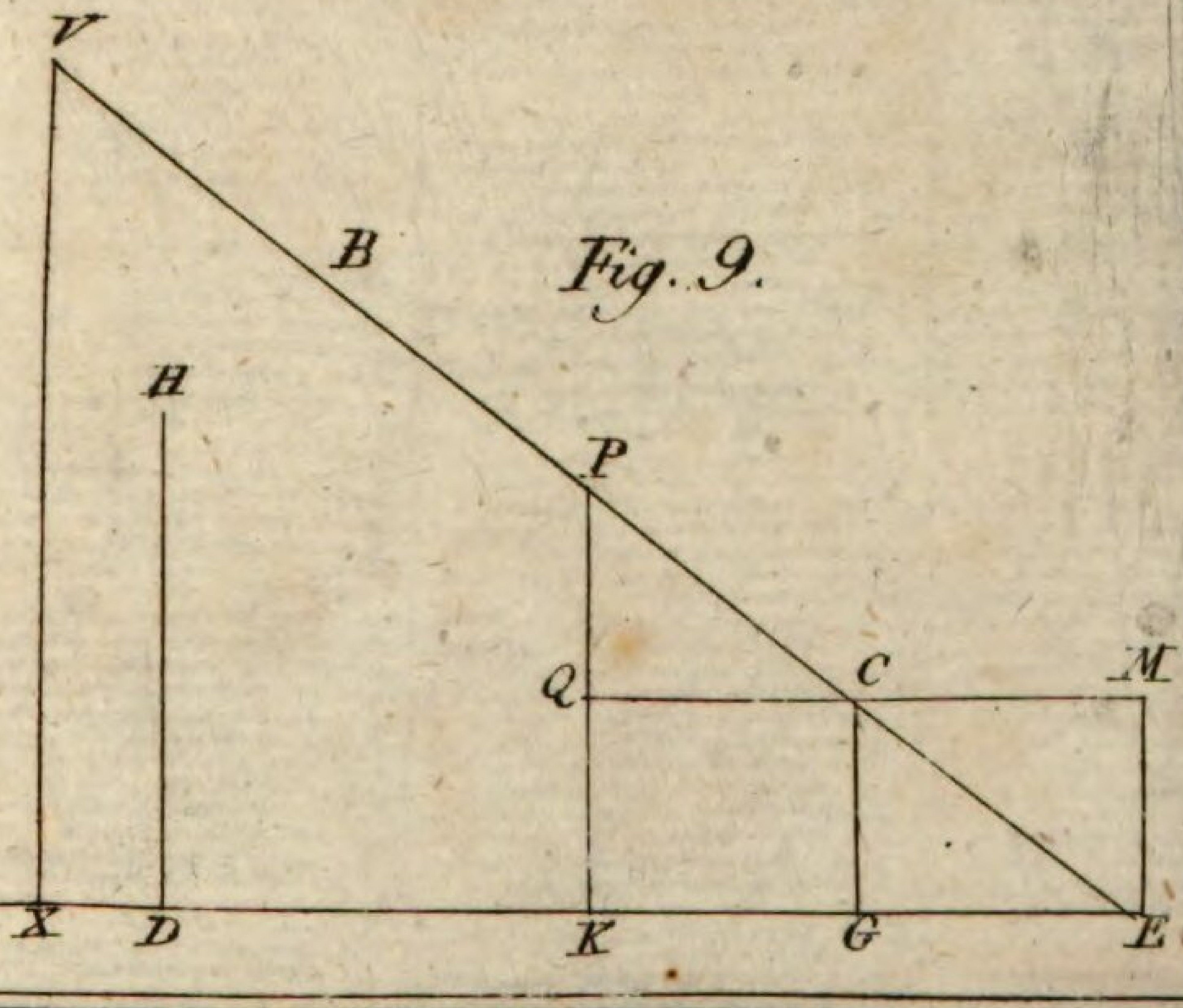


Fig. 9.



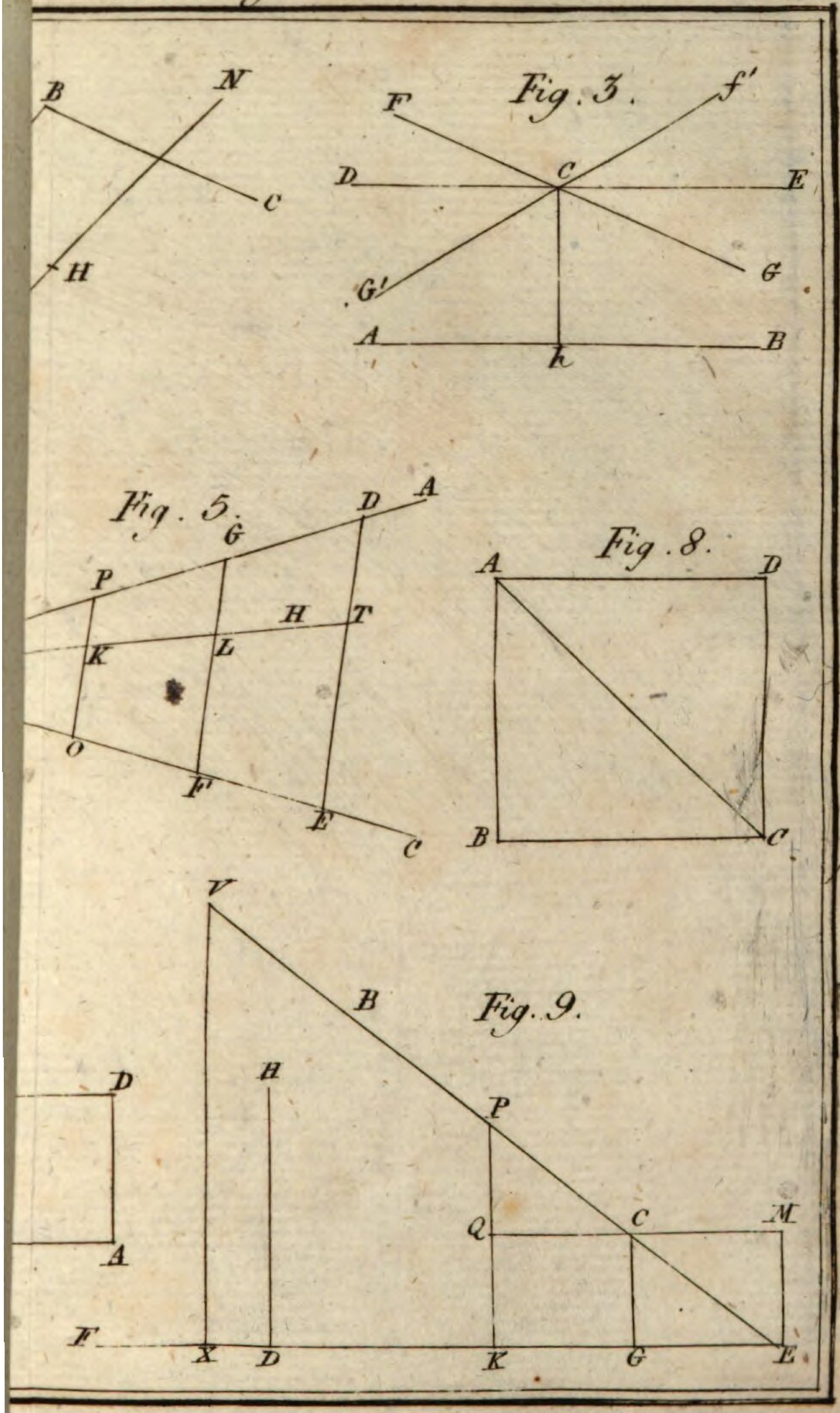


Fig. 3.
F f′ D C E G′ G A h B
B N C H
Fig. 5.
D A G P H T K L O F E C
Fig. 8.
A D B C
Fig. 9.
V B H P Q C M D A F X D K G E

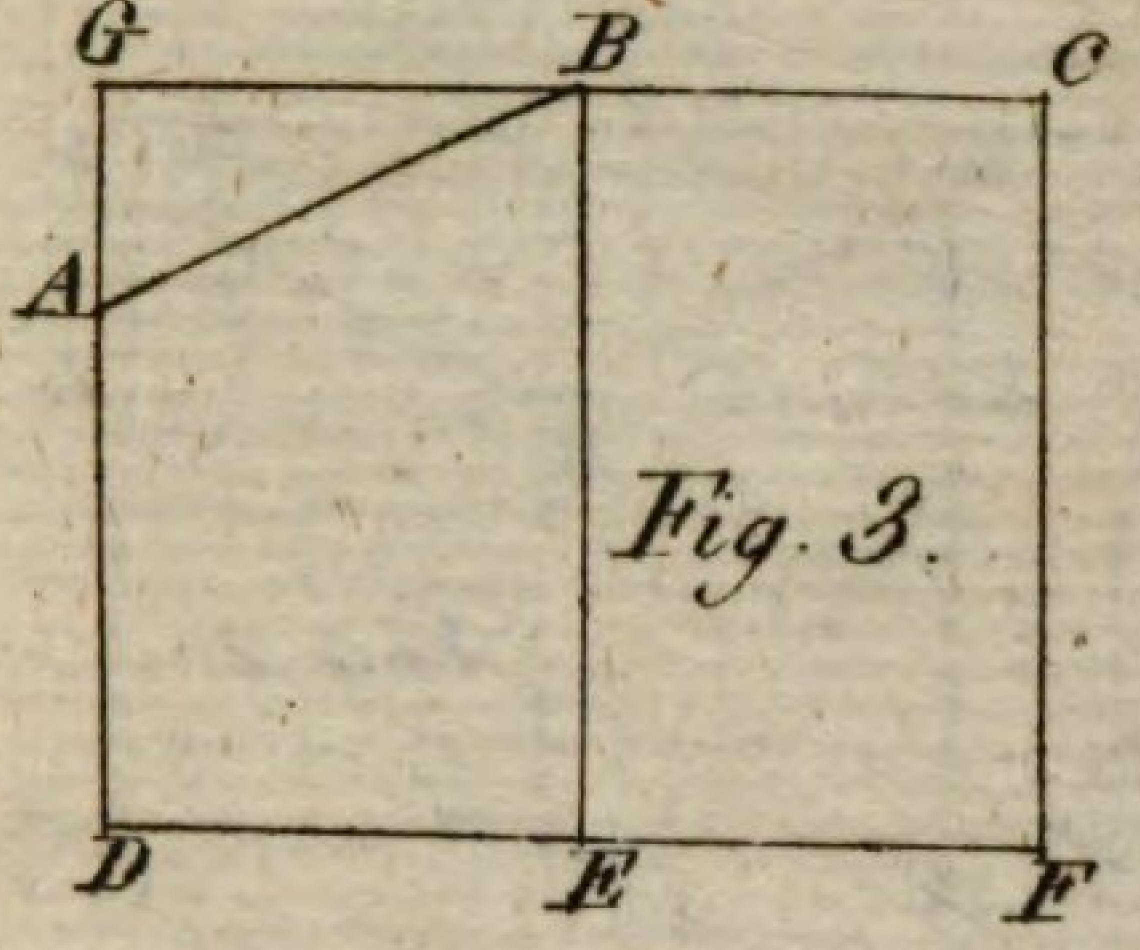


Fig. 3.

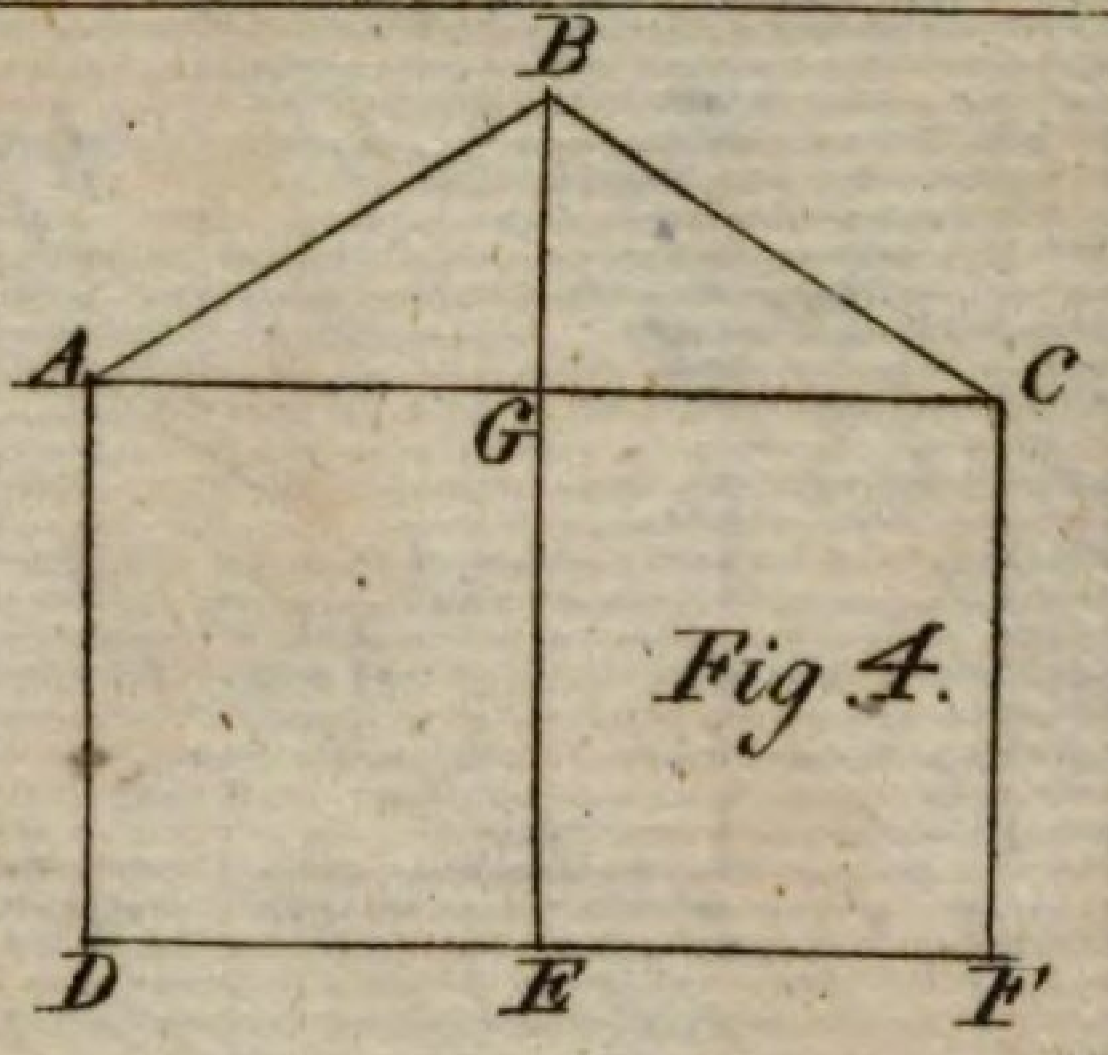


Fig. 4.

Fig. 6.

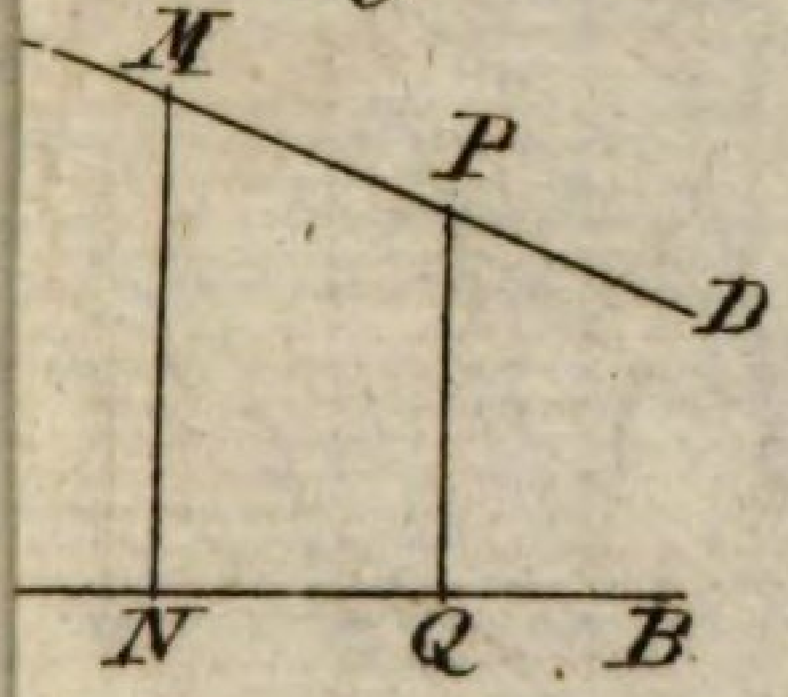


Fig. 7.

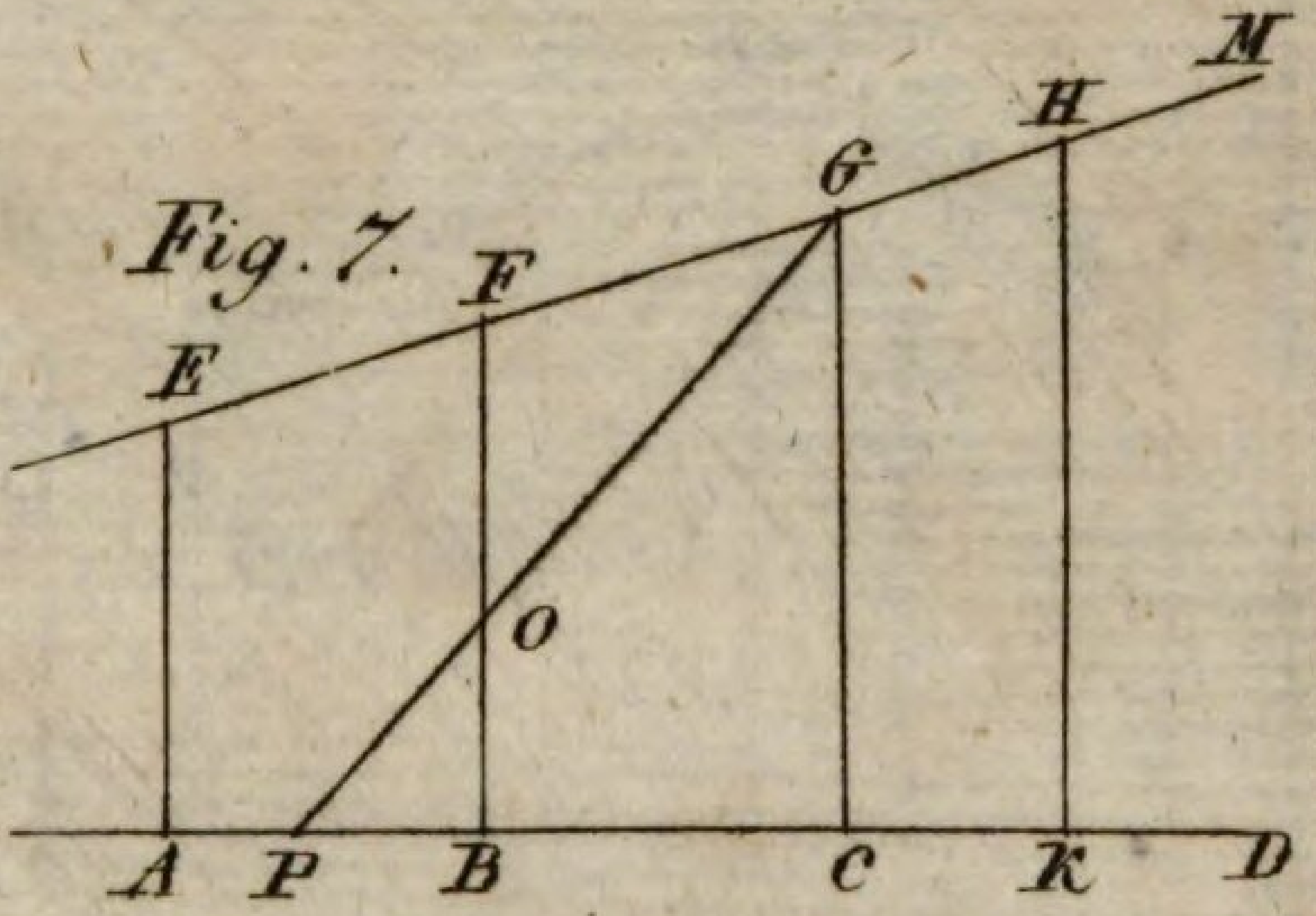
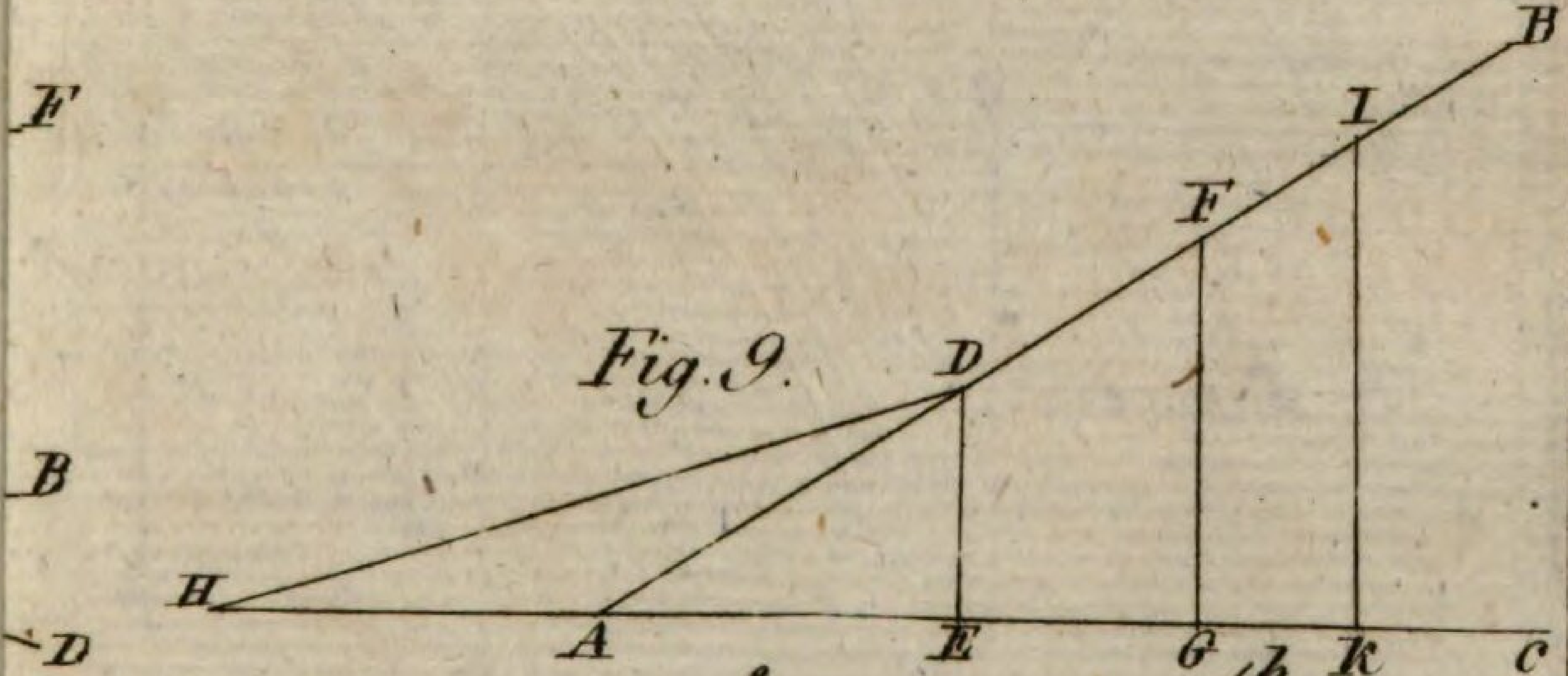


Fig. 9.



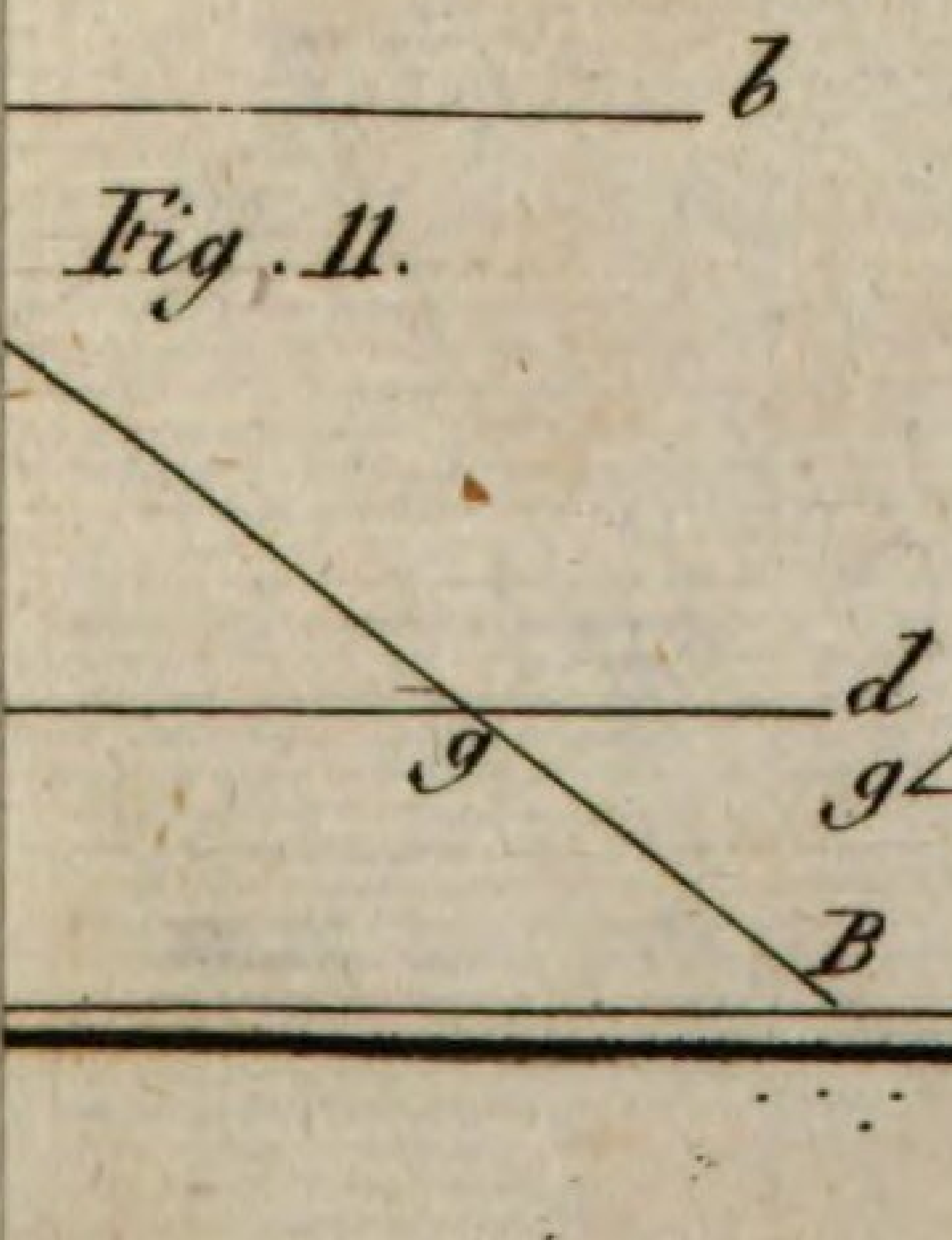


Fig. 11.

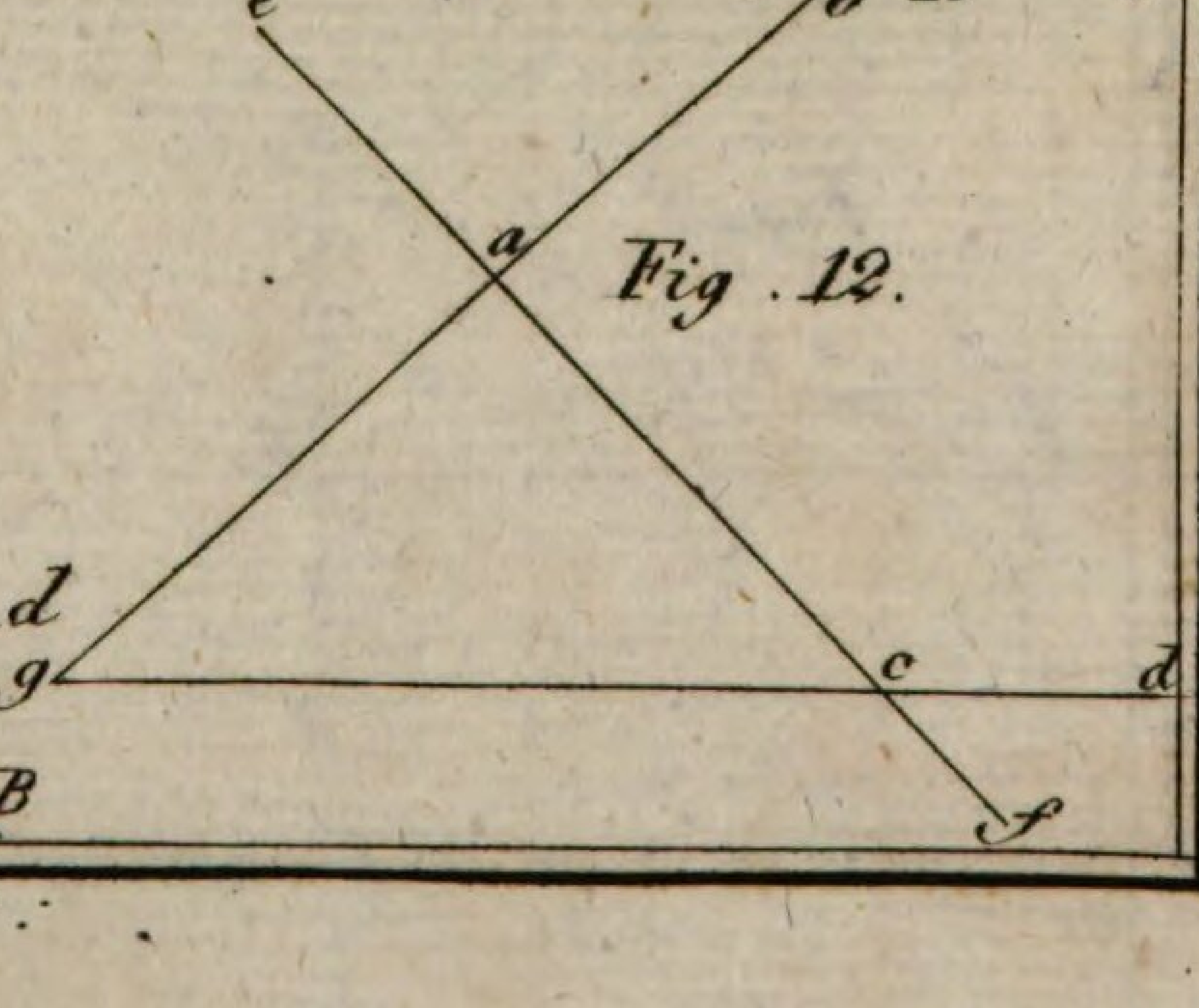


Fig. 12.

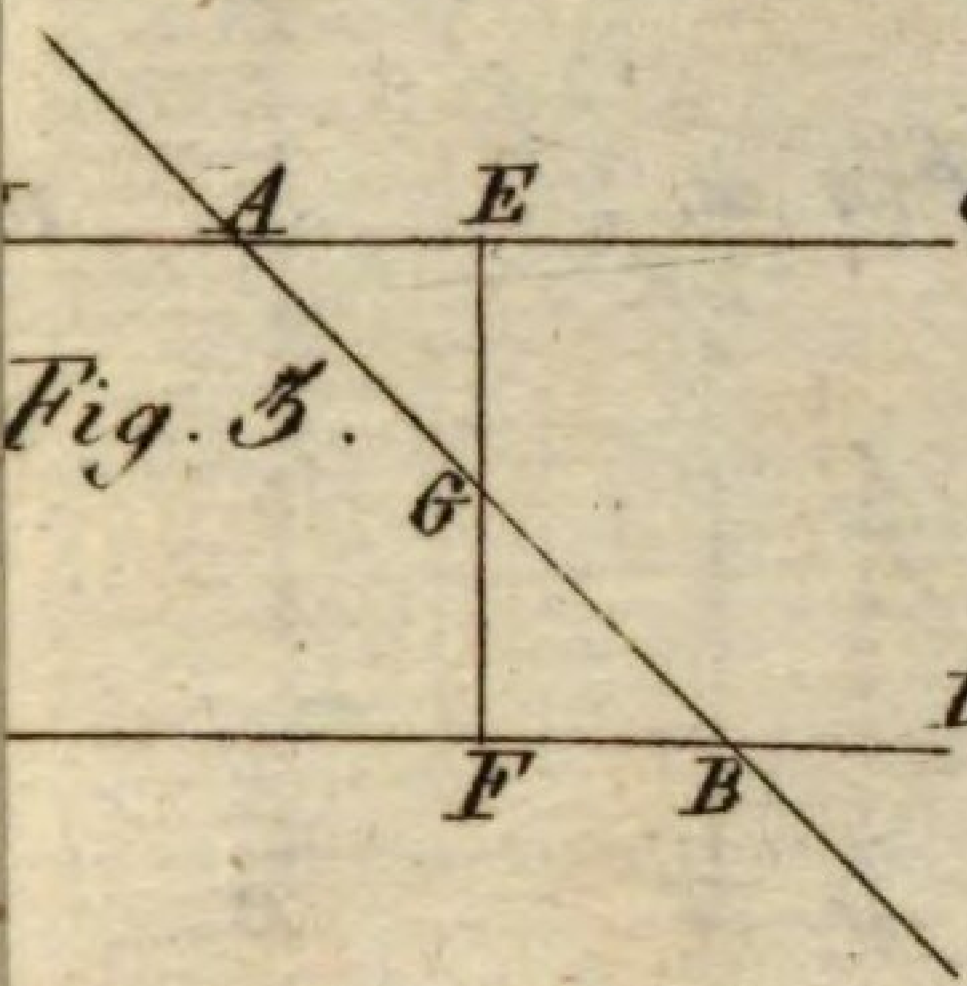


Fig. 3.

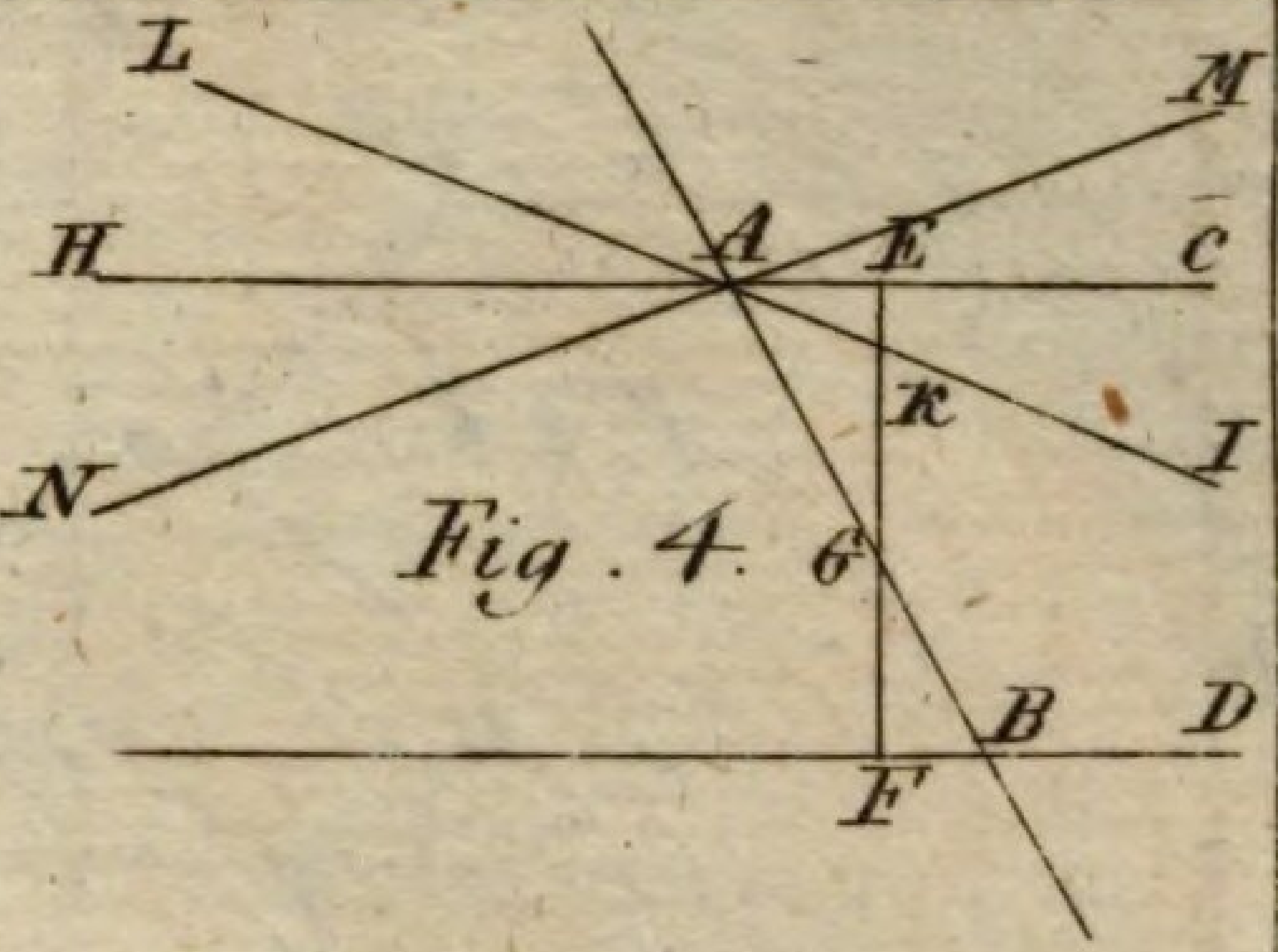


Fig. 4.

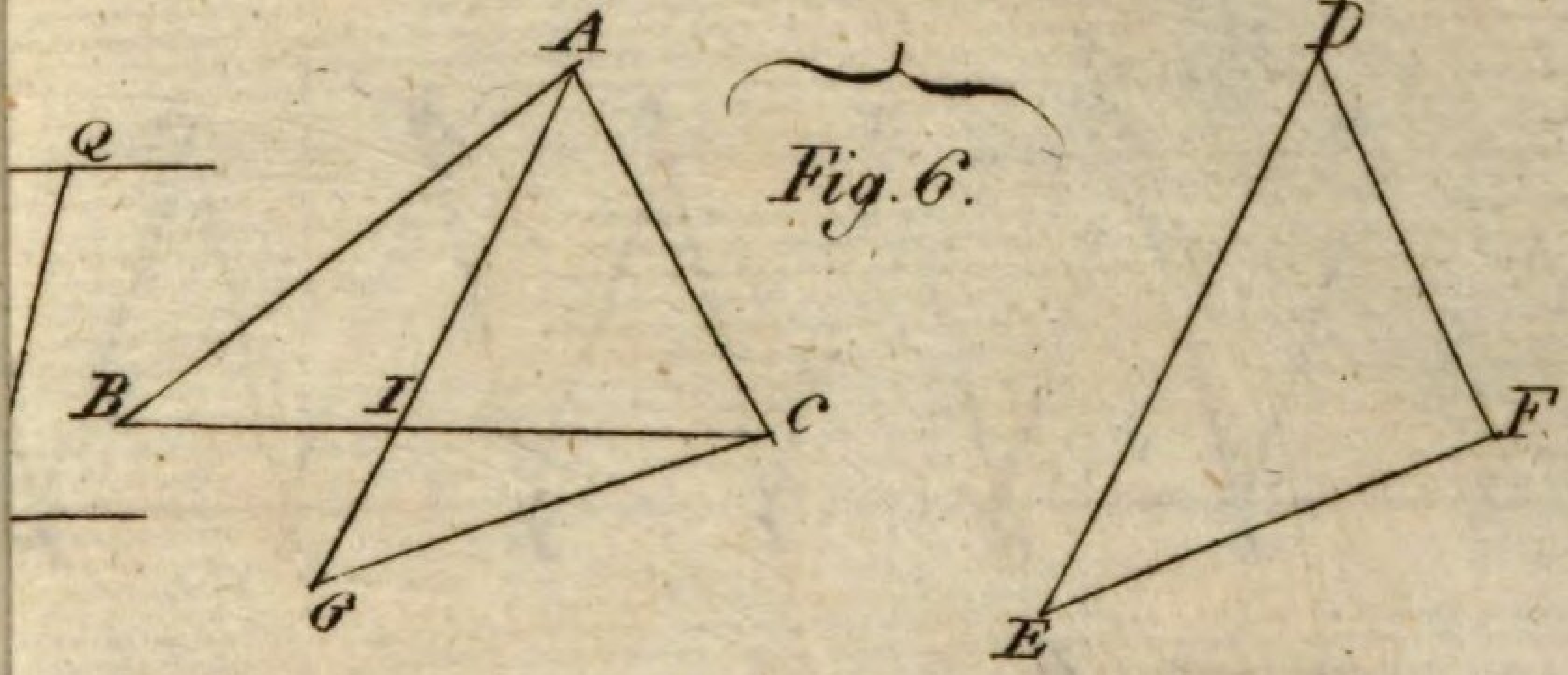


Fig. 6.

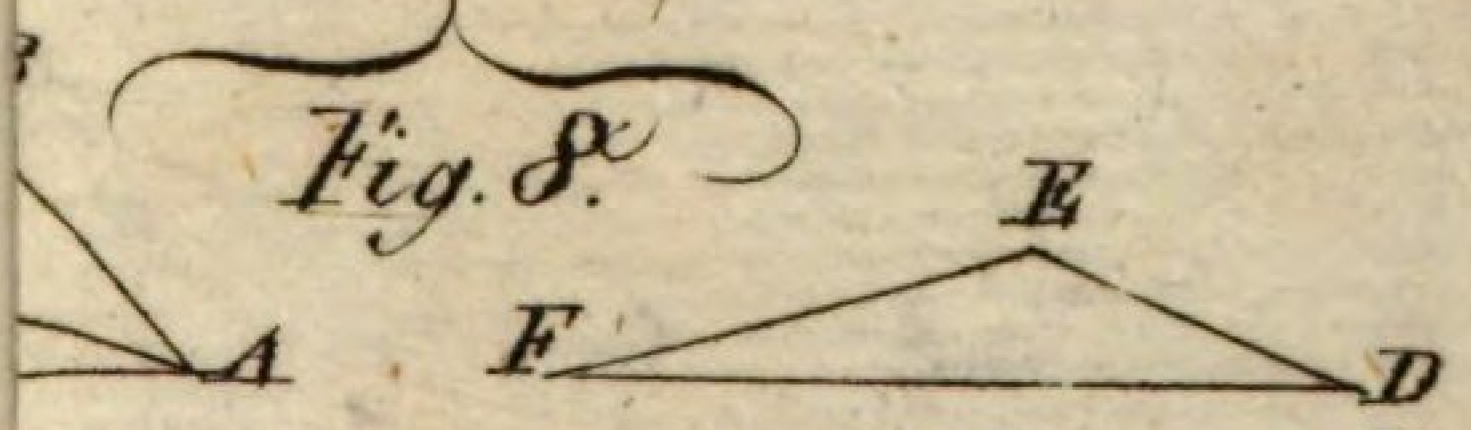


Fig. 8.

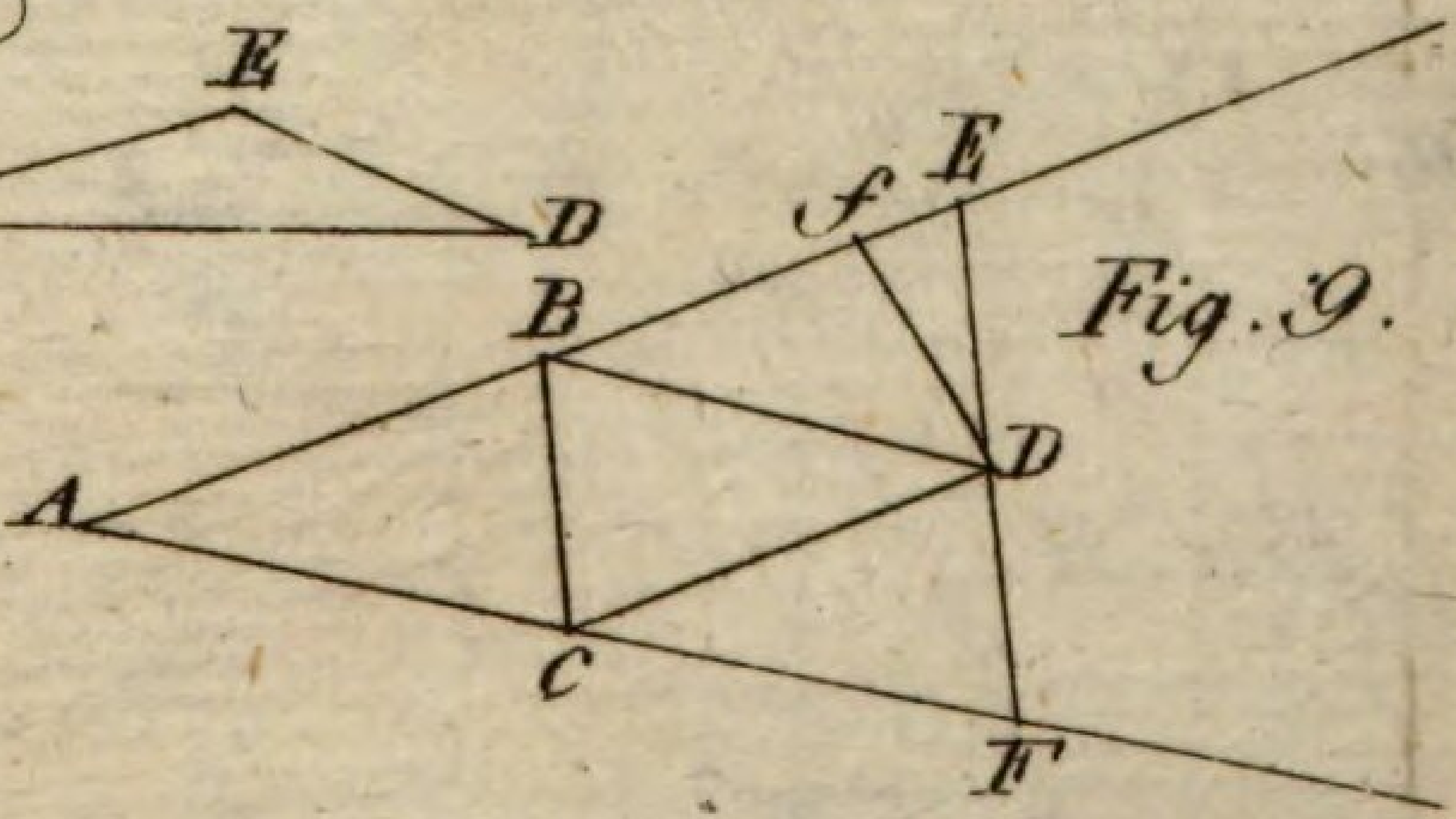


Fig. 9.

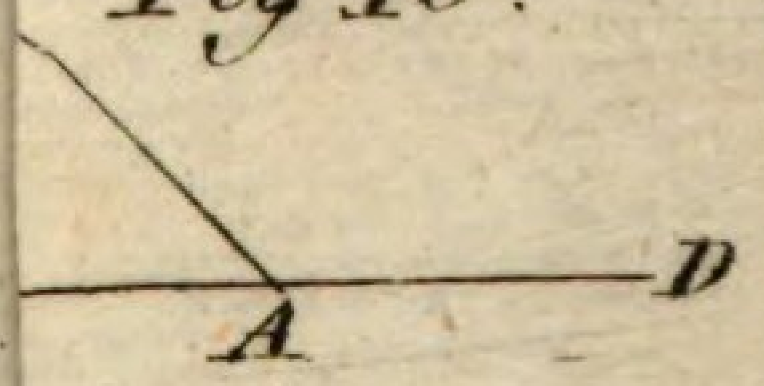


Fig 10.

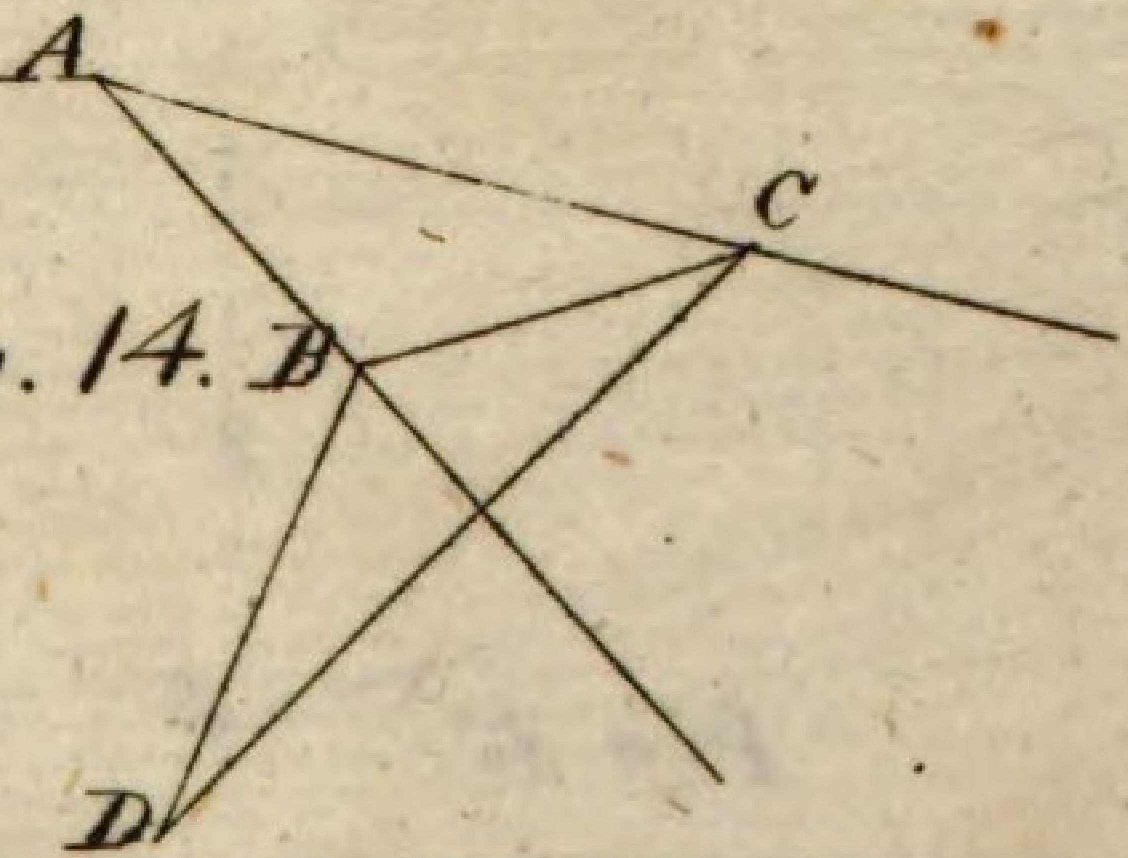


Fig. 14.

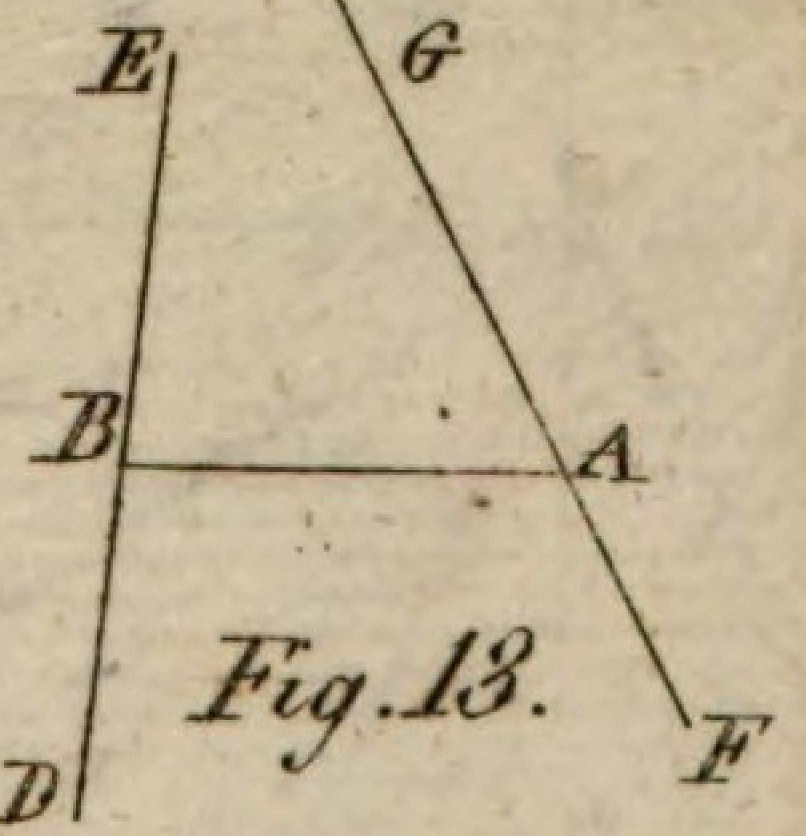


Fig. 13.

P Q

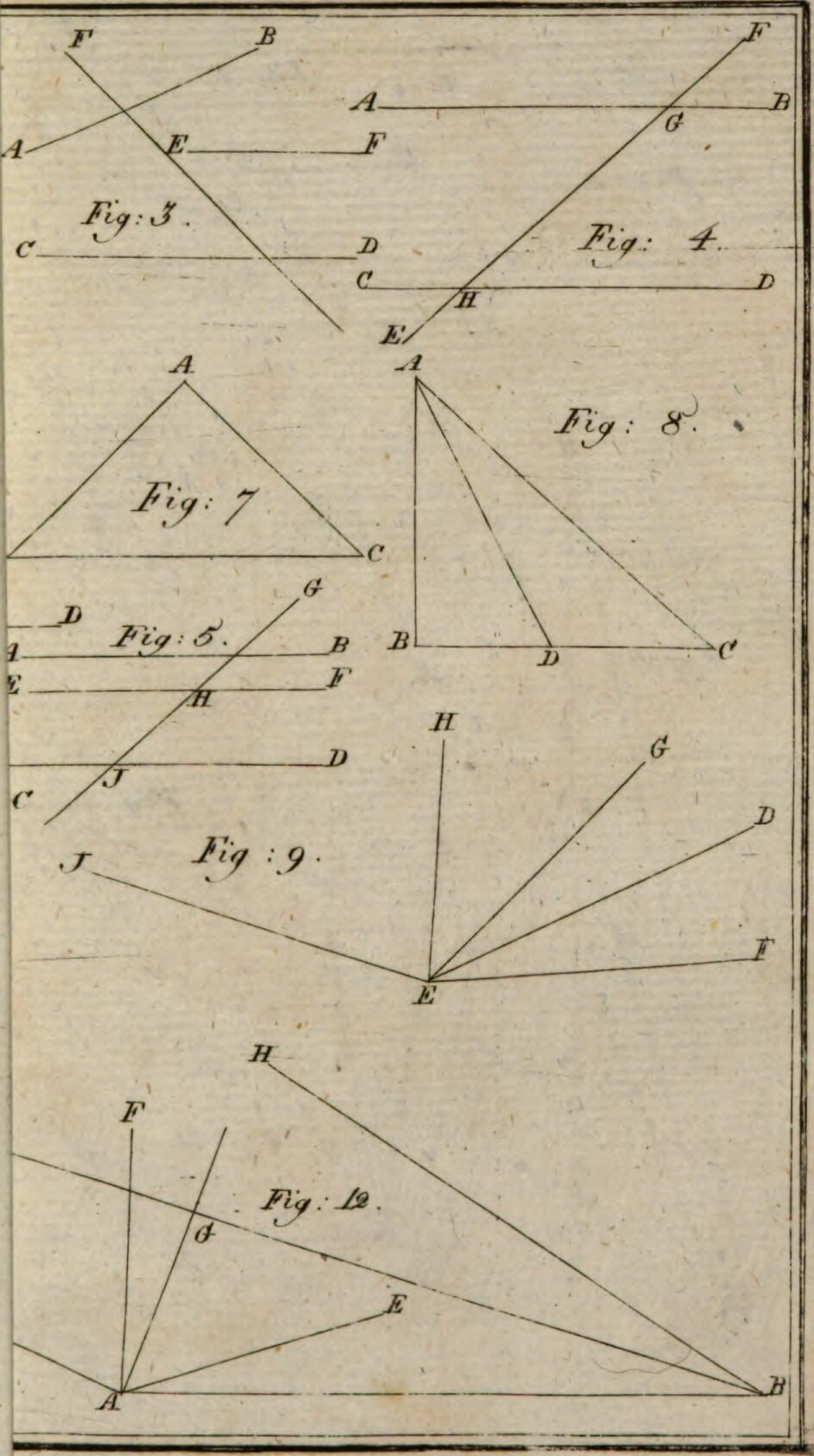


Fig: 3.
Fig: 4.
Fig: 7
Fig: 8.
Fig: 5.
Fig: 9.
Fig: 12.

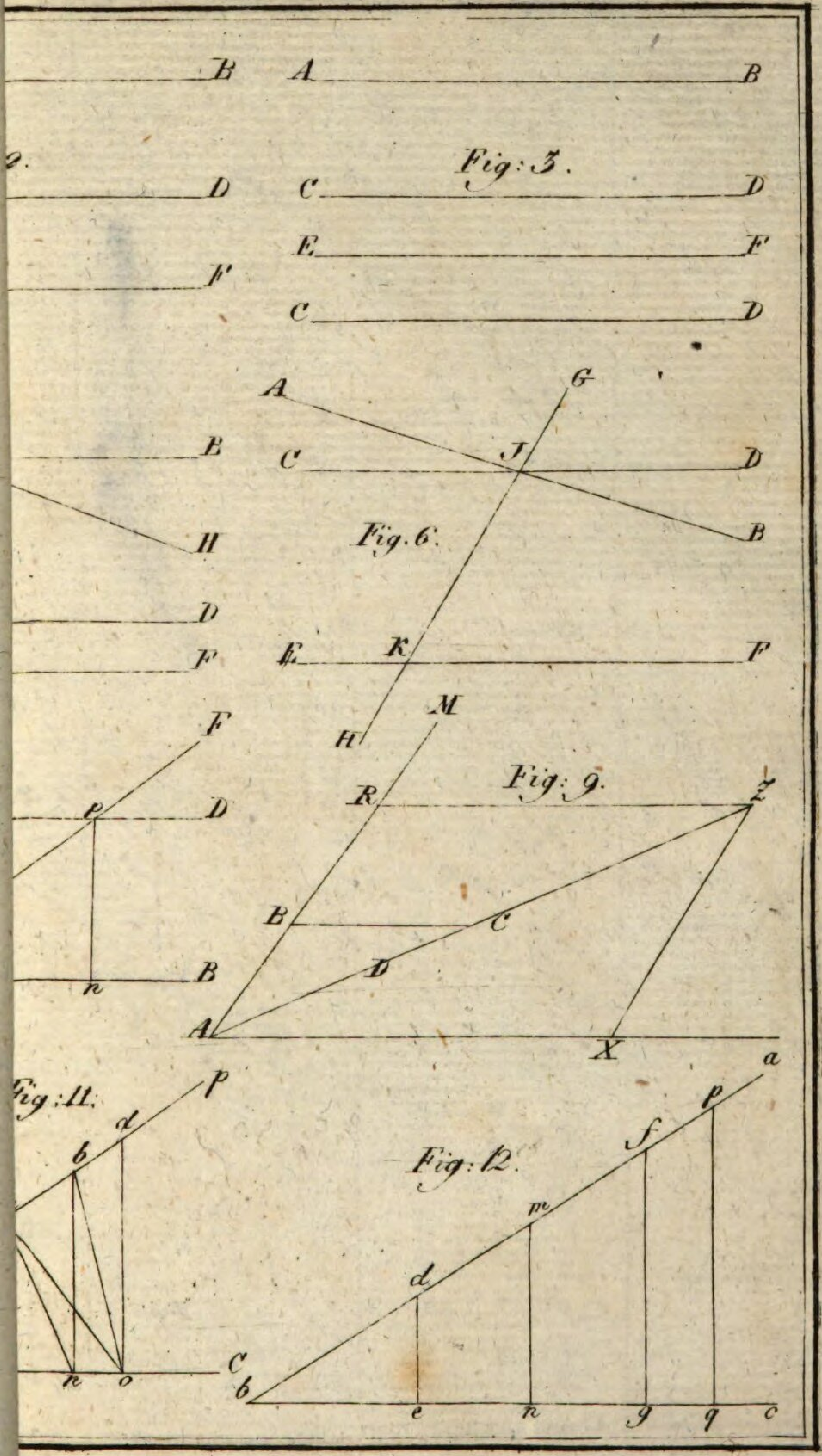


Fig: 3.

Fig. 6.

Fig: 9.

Fig: 11.

Fig: 12.

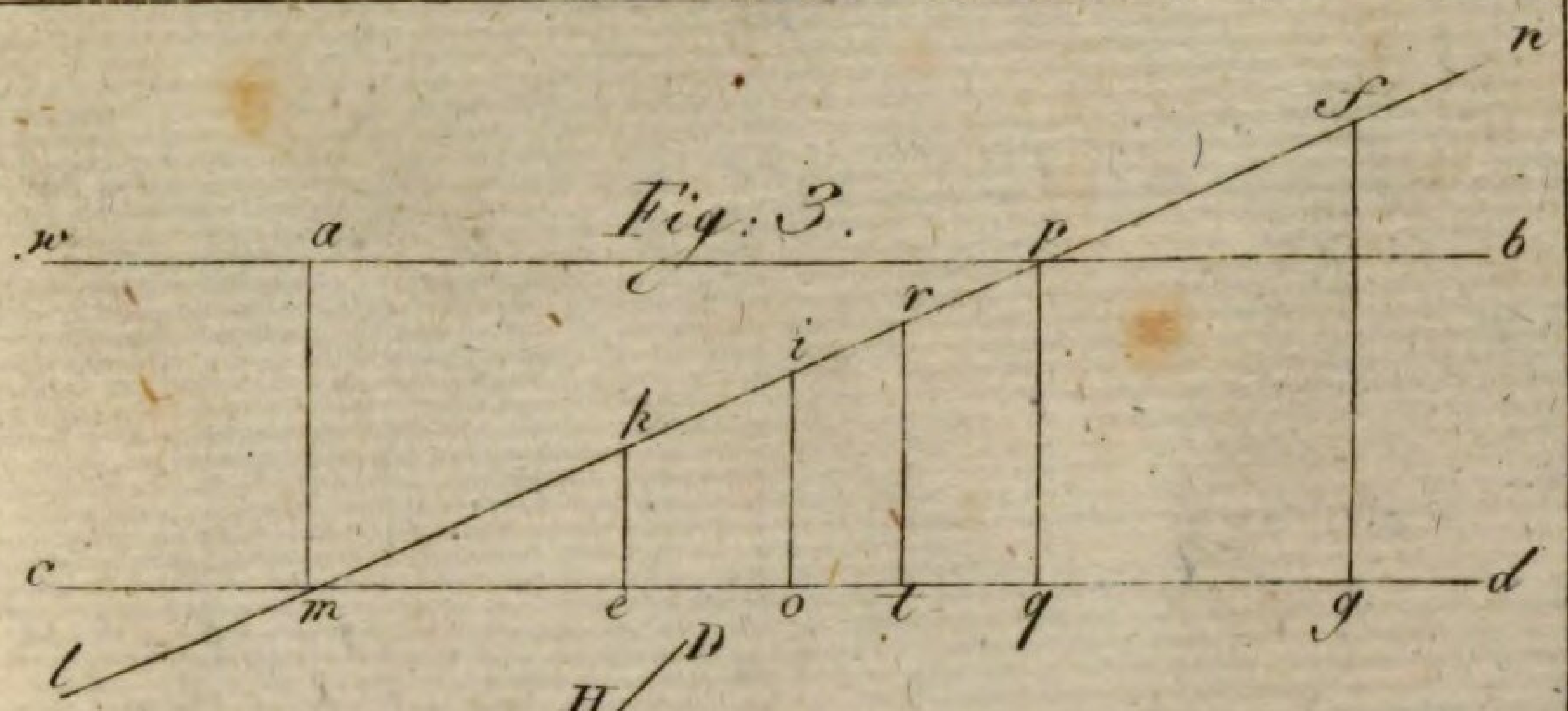


Fig: 3.

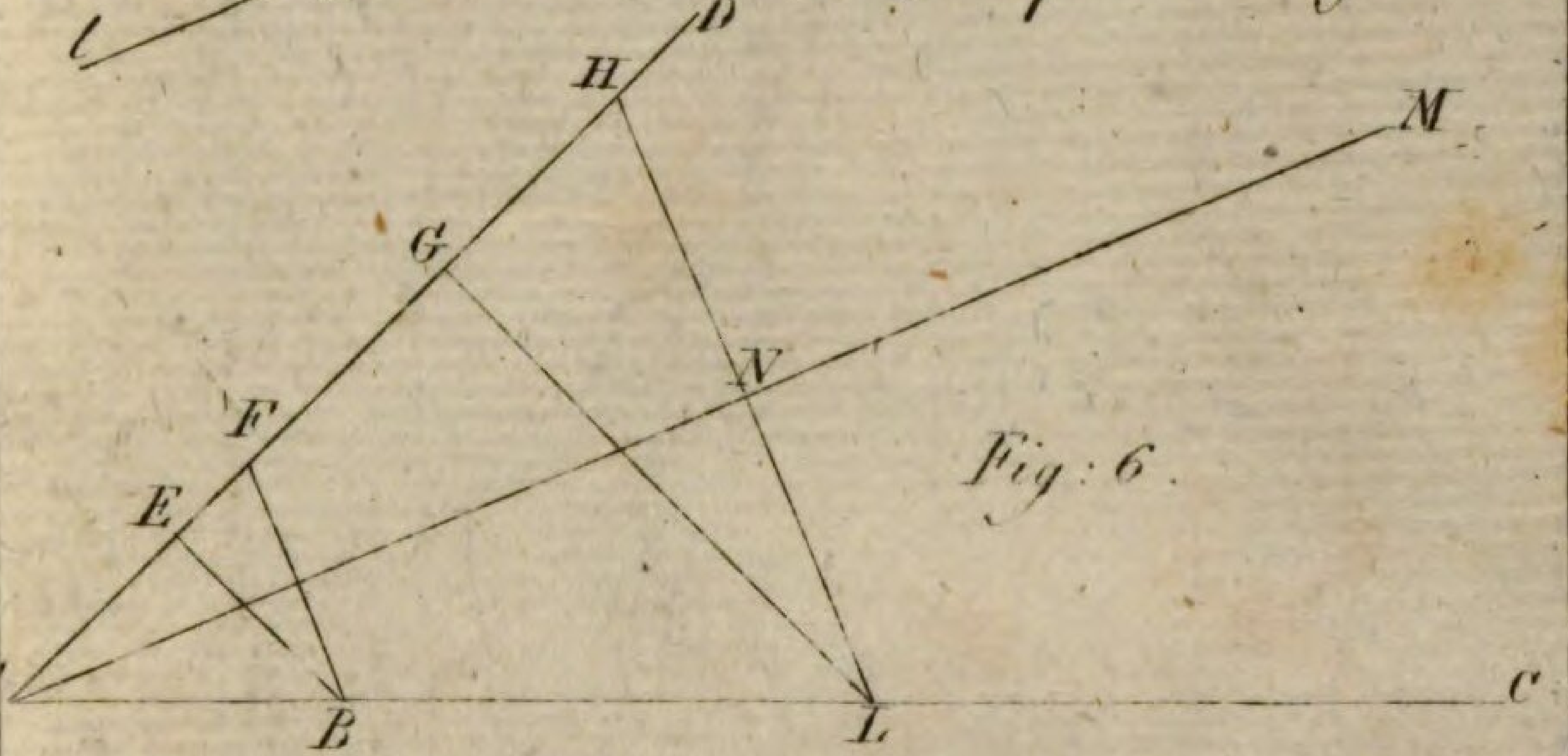


Fig: 6.

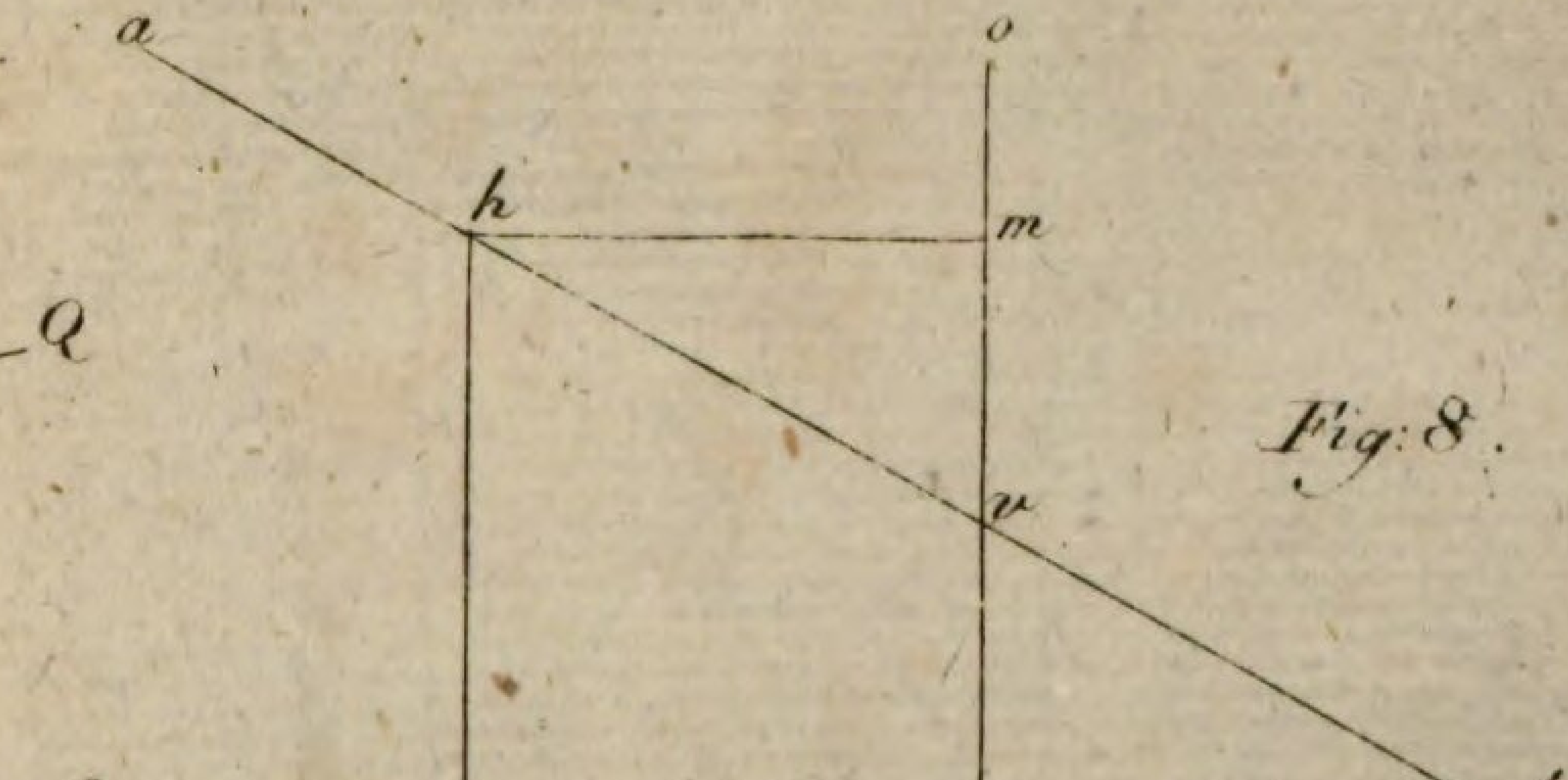


Fig: 8.

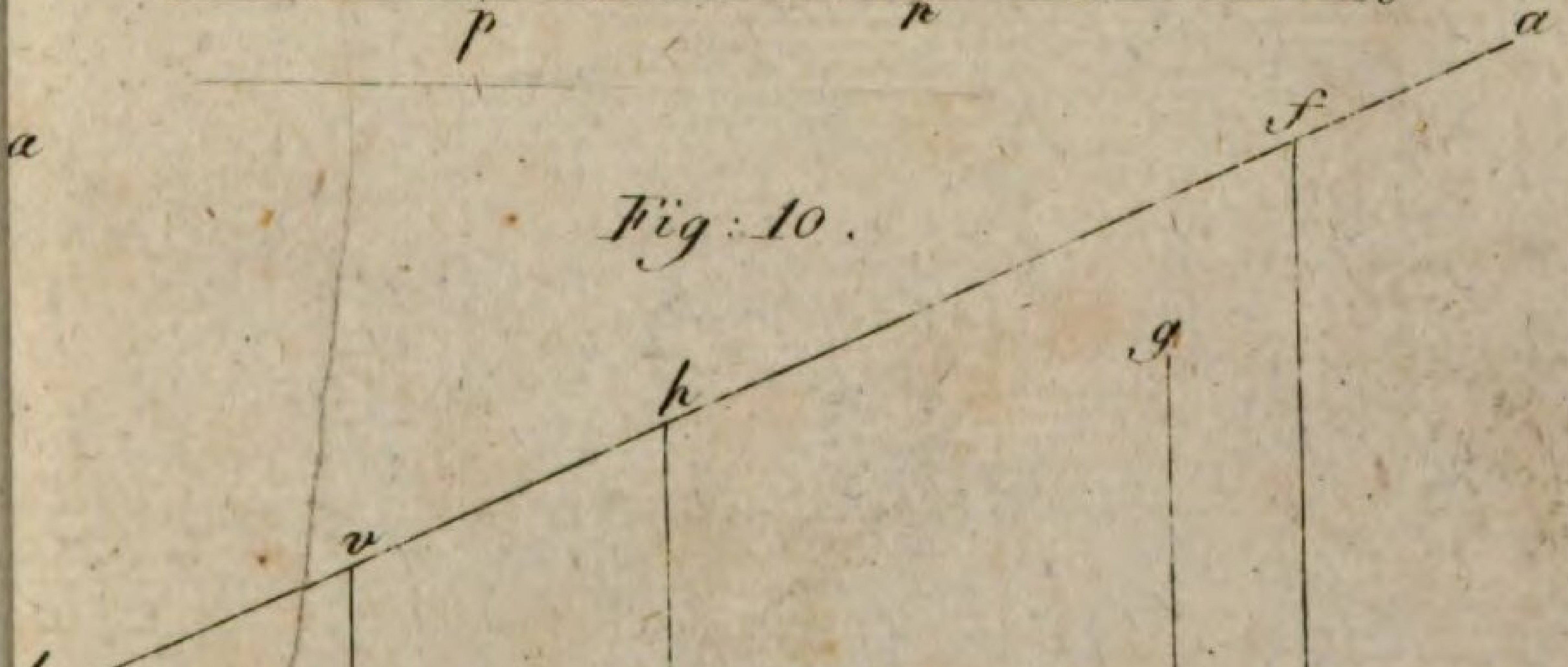


Fig: 10.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Josef Ignaz <<von>>,

Critik der Parallel-Theorie

Bd.: 1

Jena 1807

Math.p. 224 q-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082054-6